数学演習（平均値の定理）Ｒ１．７．２６　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ ⑴　$f(x)=2\sqrt{x}$ と区間 $[1,\ 4]$ について，平均値の定理の式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす c の値を求めよ。

⑵　$f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ のとき，$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$，$0<\theta<1$ を満たす θ を正の数 a，h で表し，$\displaystyle\lim_{h\to+0}\theta$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

$\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ のとき　$a-b<b\log b-a\log a<b-a$

$\boxed{3}$ 平均値の定理を利用して，次のことを証明せよ。

⑴　$a<b$ のとき　$e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$

⑵　$t>0$ のとき　$0<\log\dfrac{e^t-1}{t}<t$

⑶　$0<a<b$ のとき　$1-\dfrac{a}{b}<\log b-\log a<\dfrac{b}{a}-1$

$\boxed{4}$ 平均値の定理を利用して，極限値 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos x^2}{x - x^2}$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 平均値の定理を利用して，次の極限値を求めよ。

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \log \dfrac{e^x - 1}{x}$

(2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin \pi x}{x - 1}$

数学演習（平均値の定理）Ｒ１．７．２６　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=2\sqrt{x}$ と区間 $[1,\ 4]$ について，平均値の定理の式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす c の値を求めよ。

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ のとき，$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$，$0<\theta<1$ を満たす θ を正の数 a，h で表し，$\displaystyle\lim_{h\to+0}\theta$ を求めよ。

解答　(1) $c=\dfrac{9}{4}$　　(2) $\theta=\dfrac{\sqrt{a^2+ah}-a}{h}$，$\displaystyle\lim_{h\to+0}\theta=\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $f(x)$ は区間 $(1,\ 4)$ で微分可能で　$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

平均値の定理の式 $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$ を満たす c の値は，$\dfrac{4-2}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ から

$$\sqrt{c}=\frac{3}{2}\qquad \text{ゆえに}\qquad c=\frac{9}{4}$$

これは $1<c<4$ を満たすから，求める c の値である。

(2) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ で，等式から　$\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{h}{(a+\theta h)^2}$

ゆえに　$(a+\theta h)^2=a(a+h)$

$a+\theta h>0$ であるから　$a+\theta h=\sqrt{a^2+ah}$

よって　$\theta=\dfrac{\sqrt{a^2+ah}-a}{h}$

また，$a>0$ であるから

$$\lim_{h\to+0}\theta=\lim_{h\to+0}\frac{\sqrt{a^2+ah}-a}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{(a^2+ah)-a^2}{h(\sqrt{a^2+ah}+a)}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{a}{\sqrt{a^2+ah}+a}=\frac{a}{\sqrt{a^2}+a}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$

$\boxed{2}$ 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

$\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ のとき　$a-b<b\log b-a\log a<b-a$

解答　略

解説

関数 $f(x)=x\log x$ は，$x>0$ で微分可能で　$f'(x)=\log x+1$

よって，区間 $[a,\ b]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{b\log b-a\log a}{b-a}=\log c+1,\quad a<c<b$$

を満たす c が存在する。

$\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ と $a<c<b$ から　$\dfrac{1}{e^2}<c<1$

各辺の自然対数をとって　$\log\dfrac{1}{e^2}<\log c<\log 1$　すなわち　$-2<\log c<0$

この不等式の各辺に 1 を加えて　$-1<\log c+1<1$

よって　$-1<\dfrac{b\log b-a\log a}{b-a}<1$

この不等式の各辺に $b-a\ (>0)$ を掛けて　$a-b<b\log b-a\log a<b-a$

$\boxed{3}$ 平均値の定理を利用して，次のことを証明せよ。

(1) $a<b$ のとき　$e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$　　(2) $t>0$ のとき　$0<\log\dfrac{e^t-1}{t}<t$

(3) $0<a<b$ のとき　$1-\dfrac{a}{b}<\log b-\log a<\dfrac{b}{a}-1$

解答　(1) 略　(2) 略　(3) 略

解説

(1) 関数 $f(x)=e^x$ は微分可能で　$f'(x)=e^x$

よって，区間 $[a,\ b]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^c,\quad a<c<b$$

を満たす c が存在する。

$a<c<b$ から　$e^a<e^c<e^b$　　したがって　$e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$

(2) (1) の不等式において，$a=0$，$b=t$ とすると

$$e^0<\frac{e^t-e^0}{t-0}<e^t\quad \text{すなわち}\quad 1<\frac{e^t-1}{t}<e^t$$

各辺は正の数であるから，各辺の自然対数をとると　$0<\log\dfrac{e^t-1}{t}<t$

別解　(1) の不等式を利用しない証明。

関数 $f(x)=e^x$ に区間 $[0,\ t]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{e^t-e^0}{t-0}=e^c,\quad 0<c<t$$

を満たす c が存在する。

$0<c<t$ から　$e^0<e^c<e^t$　　よって　$1<\dfrac{e^t-1}{t}<e^t$

各辺の自然対数をとって　$0<\log\dfrac{e^t-1}{t}<t$

(3) 関数 $f(x)=\log x$ は $x>0$ で微分可能で　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

よって，区間 $[a,\ b]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{\log b-\log a}{b-a}=\frac{1}{c},\quad a<c<b$$

を満たす c が存在する。

$0<a<b$ と $a<c<b$ から　$0<a<c<b$

ゆえに　$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{a}$　　よって　$\dfrac{1}{b}<\dfrac{\log b-\log a}{b-a}<\dfrac{1}{a}$

この不等式の各辺に $b-a\ (>0)$ を掛けて

$\dfrac{b-a}{b}<\log b-\log a<\dfrac{b-a}{a}$　すなわち　$1-\dfrac{a}{b}<\log b-\log a<\dfrac{b}{a}-1$

$\boxed{4}$ 平均値の定理を利用して，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos x^2}{x-x^2}$ を求めよ。

解答　0

解説

$f(x)=\cos x$ とすると，$f(x)$ はすべての実数 x について微分可能であり

$$f'(x)=-\sin x$$

[1] $x<0$ のとき

$x<x^2$ であるから，区間 $[x,\ x^2]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{\cos x^2-\cos x}{x^2-x}=-\sin\theta_1,\quad x<\theta_1<x^2$$

を満たす θ_1 が存在する。

$\displaystyle\lim_{x\to-0}x=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-0}x^2=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\theta_1=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\cos x^2-\cos x}{x^2-x}=\lim_{x\to-0}(-\sin\theta_1)=-\sin0=0$

[2] $x>0$ のとき，$x\to+0$ であるから，$0<x<1$ としてよい。

このとき，$x^2<x$ であるから，区間 $[x^2,\ x]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{\cos x-\cos x^2}{x-x^2}=-\sin\theta_2,\quad x^2<\theta_2<x$$

を満たす θ_2 が存在する。

$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^2=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\theta_2=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\cos x-\cos x^2}{x-x^2}=\lim_{x\to+0}(-\sin\theta_2)=-\sin0=0$

以上から　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos x^2}{x-x^2}=0$

$\boxed{5}$ 平均値の定理を利用して，次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\log\frac{e^x-1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$

解答　(1) 0　(2) $-\pi$

解説

(1) $f(x)=e^x$ とすると，$f(x)$ は常に微分可能で　$f'(x)=e^x$

[1] $x<0$ のとき，区間 $[x,\ 0]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{e^0-e^x}{0-x}=e^{c_1},\quad x<c_1<0$$

を満たす c_1 が存在する。

$\displaystyle\lim_{x\to-0}x=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to-0}c_1=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\log\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to-0}\log e^{c_1}=\lim_{x\to-0}c_1=0$

[2] $x>0$ のとき，区間 $[0,\ x]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{e^x-e^0}{x-0}=e^{c_2},\quad 0<c_2<x$$

を満たす c_2 が存在する。

$\displaystyle\lim_{x\to+0}x=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to+0}c_2=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to+0}\log e^{c_2}=\lim_{x\to+0}c_2=0$

以上から　$\displaystyle\lim_{x\to0}\log\frac{e^x-1}{x}=0$

(2) $f(x)=\sin\pi x$ とすると，$f(x)$ は常に微分可能で　$f'(x)=\pi\cos\pi x$

[1] $x<1$ のとき，区間 $[x,\ 1]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{\sin\pi-\sin\pi x}{1-x}=\pi\cos\pi\theta_1,\quad x<\theta_1<1$$

を満たす θ_1 が存在する。

$\lim_{x\to 1-0} x=1$ であるから　　$\lim_{x\to 1-0} \theta_1=1$

よって　　$\lim_{x\to 1-0} \frac{\sin \pi x}{x-1}=\lim_{x\to 1-0} \pi\cos\pi\theta_1=\pi\cos\pi=-\pi$

[2]　$1<x$ のとき，区間 $[1,\ x]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{\sin \pi x-\sin \pi}{x-1}=\pi\cos\pi\theta_2,\ 1<\theta_2<x$$

を満たす θ_2 が存在する。

$\lim_{x\to 1+0} x=1$ であるから　　$\lim_{x\to 1+0} \theta_2=1$

よって　　$\lim_{x\to 1+0} \frac{\sin \pi x}{x-1}=\lim_{x\to 1+0} \pi\cos\pi\theta_2=\pi\cos\pi=-\pi$

以上から　　$\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}=-\pi$