数学演習（接線と法線）Ｒ１．７．２５

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ (1)　次の曲線上の点Ａにおける接線と法線の方程式を求めよ。

(ア)　$y=-\sqrt{2x}$，A$(2,\ -2)$　　(イ)　$y=e^{-x}-1$，A$(-1,\ e-1)$

(ウ)　$y=\tan 2x$，A$\left(\dfrac{\pi}{8},\ 1\right)$

(2)　曲線 $y=x+\sqrt{x}$ に接し，傾きが $\dfrac{3}{2}$ である直線の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$ (1)　次の曲線に，与えられた点Ｐから引いた接線の方程式と，そのときの接点の座標を求めよ。

(ア)　$y=x\log x$，P$(0,\ -2)$　　(イ)　$y=\dfrac{1}{x}+1$，P$(1,\ -2)$

(2)　直線 $y=x$ が曲線 $y=a^x$ の接線となるとき，a の値と接点の座標を求めよ。ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする。

$\boxed{3}$ 次の曲線上の点Ｐ，Ｑにおける接線の方程式をそれぞれ求めよ。

(1)　双曲線 $x^2-y^2=a^2$ 上の点Ｐ$(x_1,\ y_1)$　　ただし，$a>0$

(2)　曲線 $x=1-\cos 2t$，$y=\sin t+2$ 上の $t=\dfrac{5}{6}\pi$ に対応する点Ｑ

$\boxed{4}$ 2つの曲線 $y=e^x$，$y=\log(x+2)$ の共通接線の方程式を求めよ。

$\boxed{5}$ 2曲線 $y=x^2-2x$，$y=\log x+a$ が接するとき，定数 a の値を求めよ。このとき，接点での接線の方程式を求めよ。

$\boxed{6}$ 2つの曲線 $y=x^2+ax+b$，$y=\dfrac{c}{x}+2$ は，点 $(2,\ 3)$ で交わり，この点における接線は互いに直交するという。定数 a，b，c の値を求めよ。

$\boxed{7}$ 曲線 $y=e^{-x^2}$ に，点 $(a,\ 0)$ から接線が引けるような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{8}$ 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\ \ (a>0)$ 上の点 P (座標軸上にはない) における接線が，x 軸，y 軸と交わる点を，それぞれ A，B とするとき，原点 O からの距離の和 $\mathrm{OA}+\mathrm{OB}$ は一定であることを示せ。

数学演習（接線と法線）Ｒ１．７．２５　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1 (1) 次の曲線上の点 A における接線と法線の方程式を求めよ。

（ア） $y=-\sqrt{2x}$，A$(2,\ -2)$　　（イ） $y=e^{-x}-1$，A$(-1,\ e-1)$

（ウ） $y=\tan 2x$，A$\left(\dfrac{\pi}{8},\ 1\right)$

(2) 曲線 $y=x+\sqrt{x}$ に接し，傾きが $\dfrac{3}{2}$ である直線の方程式を求めよ。

解答 (1) 接線，法線の方程式の順に

（ア） $y=-\dfrac{1}{2}x-1$，$y=2x-6$　（イ） $y=-ex-1$，$y=\dfrac{1}{e}x+e+\dfrac{1}{e}-1$

（ウ） $y=4x-\dfrac{\pi}{2}+1$，$y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{\pi}{32}+1$

(2) $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$

解説

(1) （ア） $f(x)=-\sqrt{2x}$ とすると　$f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

よって　$f'(2)=-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{f'(2)}=2$

ゆえに，接線の方程式は　$y+2=-\dfrac{1}{2}(x-2)$　すなわち　$y=-\dfrac{1}{2}x-1$

法線の方程式は　$y+2=2(x-2)$　すなわち　$y=2x-6$

（イ） $f(x)=e^{-x}-1$ とすると　$f'(x)=-e^{-x}$

よって　$f'(-1)=-e$，$-\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{e}$

ゆえに，接線の方程式は　$y-(e-1)=-e(x+1)$　すなわち　$y=-ex-1$

法線の方程式は　$y-(e-1)=\dfrac{1}{e}(x+1)$　すなわち　$y=\dfrac{1}{e}x+e+\dfrac{1}{e}-1$

（ウ） $f(x)=\tan 2x$ とすると　$f'(x)=\dfrac{2}{\cos^2 2x}$

よって　$f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=4$，$-\dfrac{1}{f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)}=-\dfrac{1}{4}$

ゆえに，接線の方程式は　$y-1=4\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)$　すなわち　$y=4x-\dfrac{\pi}{2}+1$

法線の方程式は　$y-1=-\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)$　すなわち　$y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{\pi}{32}+1$

(2) $y=x+\sqrt{x}$ から　$y'=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

点 $(a,\ a+\sqrt{a})$ における接線の方程式は

$y-(a+\sqrt{a})=\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)(x-a)$　…… ①

この直線の傾きが $\dfrac{3}{2}$ であるとすると　$1+\dfrac{1}{2\sqrt{a}}=\dfrac{3}{2}$

ゆえに　$\dfrac{1}{\sqrt{a}}=1$　　よって　$a=1$

求める直線の方程式は，$a=1$ を ① に代入して

$y-2=\dfrac{3}{2}(x-1)$　すなわち　$y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$

2 (1) 次の曲線に，与えられた点 P から引いた接線の方程式と，そのときの接点の座標を求めよ。

（ア） $y=x\log x$，P$(0,\ -2)$　　（イ） $y=\dfrac{1}{x}+1$，P$(1,\ -2)$

(2) 直線 $y=x$ が曲線 $y=a^x$ の接線となるとき，a の値と接点の座標を求めよ。ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする。

解答 (1) 接線の方程式，接点の座標の順に　（ア） $y=(\log 2+1)x-2$，$(2,\ 2\log 2)$

（イ） $y=-x-1$，$(-1,\ 0)$；$y=-9x+7$，$\left(\dfrac{1}{3},\ 4\right)$

(2) $a=e^{\frac{1}{e}}$，接点の座標は $(e,\ e)$

解説

(1) （ア） $y=x\log x$ から　$y'=\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\log x+1$

接点の座標を $(a,\ a\log a)$ $(a>0)$ とすると，接線の方程式は

$y-a\log a=(\log a+1)(x-a)$

すなわち　$y=(\log a+1)x-a$

この直線が点 $(0,\ -2)$ を通るから　$-2=-a$　　したがって　$a=2$

よって，求める接線の方程式は　$y=(\log 2+1)x-2$

また，接点の座標は　$(2,\ 2\log 2)$

（イ） $y=\dfrac{1}{x}+1$ から　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$

接点の座標を $\left(a,\ \dfrac{1}{a}+1\right)$ $(a\neq 0)$ とすると，接線の方程式は

$y-\left(\dfrac{1}{a}+1\right)=-\dfrac{1}{a^2}(x-a)$

すなわち　$y=-\dfrac{1}{a^2}x+\dfrac{2}{a}+1$　…… ①

この直線が点 $(1,\ -2)$ を通るから　$-2=-\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{a}+1$

両辺に a^2 を掛けて整理すると　$3a^2+2a-1=0$

ゆえに　$(a+1)(3a-1)=0$　　よって　$a=-1,\ \dfrac{1}{3}$

よって，求める接線の方程式と接点の座標は，① から

$a=-1$ のとき　$y=-x-1$，$(-1,\ 0)$

$a=\dfrac{1}{3}$ のとき　$y=-9x+7$，$\left(\dfrac{1}{3},\ 4\right)$

(2) $y=a^x$ から　$y'=a^x\log a$

接点の座標を $(t,\ a^t)$ とすると，接線の方程式は　$y-a^t=(a^t\log a)(x-t)$

すなわち　$y=(a^t\log a)x+a^t(1-t\log a)$

これが $y=x$ と一致するための条件は

$a^t\log a=1$ …… ①　かつ　$a^t(1-t\log a)=0$ …… ②

$a^t>0$ であるから，② より　$1-t\log a=0$

$t\neq 0$ であるから　$\log a=\dfrac{1}{t}$　　ゆえに　$a=e^{\frac{1}{t}}$

① に代入して　$e\cdot\dfrac{1}{t}=1$　　よって　$t=e$

以上から　$a=e^{\frac{1}{e}}$，接点の座標は　$(e,\ e)$

3 次の曲線上の点 P，Q における接線の方程式をそれぞれ求めよ。

(1) 双曲線 $x^2-y^2=a^2$ 上の点 P$(x_1,\ y_1)$　　ただし，$a>0$

(2) 曲線 $x=1-\cos 2t$，$y=\sin t+2$ 上の $t=\dfrac{5}{6}\pi$ に対応する点 Q

解答 (1) $x_1x-y_1y=a^2$　　(2) $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{4}$

解説

(1) $x^2-y^2=a^2$ の両辺を x について微分すると　$2x-2yy'=0$

ゆえに，$y\neq 0$ のとき　$y'=\dfrac{x}{y}$

よって，点 P における接線の方程式は，$y_1\neq 0$ のとき

$y-y_1=\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1)$　すなわち　$x_1x-y_1y=x_1{}^2-y_1{}^2$

点 P は双曲線上の点であるから　$x_1{}^2-y_1{}^2=a^2$

$y_1\neq 0$ のとき，接線の方程式は　$x_1x-y_1y=a^2$　…… ①

$y_1=0$ のとき，$x_1=\pm a$ であり，接線の方程式は　$x=\pm a$

これは ① で $x_1=\pm a$，$y_1=0$ とすると得られる。

したがって，求める接線の方程式は　$x_1x-y_1y=a^2$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=2\sin 2t=4\sin t\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=\cos t$

よって，$\sin t\cos t\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\cos t\cdot\dfrac{1}{4\sin t\cos t}=\dfrac{1}{4\sin t}$

$t=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき　$x=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}$

すなわち　Q$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$　　また　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{4}\cdot 2=\dfrac{1}{2}$

したがって，求める接線の方程式は

$y-\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$　すなわち　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{4}$

4 2 つの曲線 $y=e^x$，$y=\log(x+2)$ の共通接線の方程式を求めよ。

解答 $y=x+1$，$y=\dfrac{x}{e}+\dfrac{2}{e}$

解説

$y=e^x$ から　$y'=e^x$

よって，曲線 $y=e^x$ 上の点 $(s,\ e^s)$ における接線の方程式は

$y-e^s=e^s(x-s)$　すなわち　$y=e^sx-(s-1)e^s$　…… ①

また，$y=\log(x+2)$ から　$y'=\dfrac{1}{x+2}$

よって，曲線 $y=\log(x+2)$ 上の点 $(t,\ \log(t+2))$ における接線の方程式は

$y-\log(t+2)=\dfrac{1}{t+2}(x-t)$

すなわち　$y=\dfrac{1}{t+2}x+\log(t+2)-\dfrac{t}{t+2}$　…… ②

2 接線 ①，② が一致するための条件は

$e^s=\dfrac{1}{t+2}$ …… ③　かつ　$-(s-1)e^s=\log(t+2)-\dfrac{t}{t+2}$ …… ④

③ から　$t+2=\frac{1}{e^s}$　　よって　$t=\frac{1}{e^s}-2$

これらを ④ に代入して　$-(s-1)e^s=-s-e^s\cdot\left(\frac{1}{e^s}-2\right)$

ゆえに　$(s+1)-(s+1)e^s=0$　　よって　$(s+1)(1-e^s)=0$

ゆえに　$s=-1,\ e^s=1$　　すなわち　$s=0,\ -1$

これらを ① に代入して，求める接線の方程式は

$s=0$ のとき　$y=x+1$　　$s=-1$ のとき　$y=\frac{x}{e}+\frac{2}{e}$

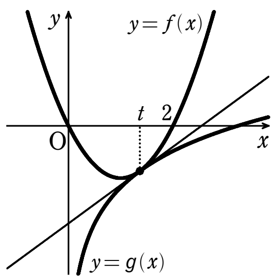
$\boxed{5}$ 2 曲線 $y=x^2-2x$，$y=\log x+a$ が接するとき，定数 a の値を求めよ。このとき，接点での接線の方程式を求めよ。

解答　$a=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\log(\sqrt{3}-1)$，接線の方程式は $y=(\sqrt{3}-1)x-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解説

$f(x)=x^2-2x$，$g(x)=\log x+a$ とすると

$f'(x)=2x-2$，$g'(x)=\frac{1}{x}$



2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が，x 座標が t である点で接するとすると，$t>0$ であり

$f(t)=g(t)$　かつ　$f'(t)=g'(t)$

よって　$t^2-2t=\log t+a$ ……①，$2t-2=\frac{1}{t}$ ……②

② から　$2t^2-2t-1=0$

これを解くと　$t=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$　　$t>0$ であるから　$t=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

ゆえに，① から　$a=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\log\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\log\frac{2}{1+\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\log(\sqrt{3}-1)$

また，接点の座標は　$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

接線の傾きは　$g'\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$

よって，求める接線の方程式は　$y-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(\sqrt{3}-1)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

すなわち　$y=(\sqrt{3}-1)x-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{6}$ 2 つの曲線 $y=x^2+ax+b$，$y=\frac{c}{x}+2$ は，点 $(2,\ 3)$ で交わり，この点における接線は互いに直交するという。定数 a，b，c の値を求めよ。

解答　$a=-2$，$b=3$，$c=2$

解説

$f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=\frac{c}{x}+2$ とする。

2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は点 $(2,\ 3)$ を通るから　$f(2)=3$，　$g(2)=3$

$f(2)=3$ から　$2^2+a\cdot2+b=3$　　よって　$2a+b=-1$ ……①

$g(2)=3$ から　$\frac{c}{2}+2=3$　　これを解いて　$c=2$

また　$f'(x)=2x+a$，$g'(x)=-\frac{c}{x^2}$

点 $(2,\ 3)$ において，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の接線は座標軸に平行でなく，互いに直交するから　$f'(2)g'(2)=-1$　　ゆえに　$(2\cdot2+a)\left(-\frac{c}{2^2}\right)=-1$

$c=2$ を代入してこれを解くと　$a=-2$　　よって，① から　$b=3$

$\boxed{7}$ 曲線 $y=e^{-x^2}$ に，点 $(a,\ 0)$ から接線が引けるような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$a\leqq-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\leqq a$

解説

$y=e^{-x^2}$ から　$y'=-2xe^{-x^2}$

接点の座標を $\left(t,\ e^{-t^2}\right)$ とすると，接線の方程式は

$y-e^{-t^2}=-2te^{-t^2}(x-t)$

この直線が点 $(a,\ 0)$ を通るとすると　$-e^{-t^2}=-2te^{-t^2}(a-t)$

両辺を $e^{-t^2}\ (\neq0)$ で割って　$-1=-2t(a-t)$

整理して　$2t^2-2at+1=0$ ……①

接線が引けるための条件は，t についての 2 次方程式 ① が実数解をもつことである。

ゆえに，① の判別式を D とすると　$D\geqq0$

$\frac{D}{4}=(-a)^2-2\cdot1=(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$

よって　$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})\geqq0$

したがって　$a\leqq-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\leqq a$

$\boxed{8}$ 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$　$(a>0)$ 上の点 P (座標軸上にはない) における接線が，x 軸，y 軸と交わる点を，それぞれ A，B とするとき，原点 O からの距離の和 OA＋OB は一定であることを示せ。

解答　略

解説

根号内は負でないから　$x\geqq0$，$y\geqq0$

よって，座標軸上にはない点 P の座標を $(s,\ t)$ とすると，$s>0$ かつ $t>0$ である。

$x>0$，$y>0$ のとき，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ の両辺を x で微分して

$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0$　　よって　$y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}$

ゆえに，点 P における接線の方程式は

$y-t=-\sqrt{\frac{t}{s}}(x-s)$

すなわち　$y=-\sqrt{\frac{t}{s}}x+\sqrt{st}+t$

$y=0$ とすると　$x=s+\sqrt{st}$

$x=0$ とすると　$y=\sqrt{st}+t$

よって　$\mathrm{OA}+\mathrm{OB}=(s+\sqrt{st})+(\sqrt{st}+t)$

$=(\sqrt{s}+\sqrt{t})^2=(\sqrt{a})^2=a$

したがって，OA＋OB は一定である。