

1

関数 $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ を微分せよ。

2

媒介変数 t を用いて表される関数 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 - \sin t \end{cases}$ について、 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ を t を用いて表せ。

3

曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ 上の点 $(4, 9)$ における法線の方程式を求めよ。

4

関数 $f(x) = x^{2x} \ (x > 0)$ について、次の問いに答えよ。
(1) $f'(x)$ を求めよ。
(2) $f(x)$ の極値を求めよ。

5

関数 $y = x + \sqrt{1 - x^2}$ の最大値、最小値を求めよ。

6

関数 $f(x) = \frac{x - a}{x^2 + x + 1}$ が $x = -1$ で極値を取るように、定数 a の値を定めよ。

7 $e < p < q$ のとき、不等式 $\log q - \log p < \frac{q-p}{e}$ を証明せよ。ただし、 e は自然対数の底である。

8 関数 $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$ のグラフをかけ。(凹凸も調べよ)

9 点 $P(0, a)$ から曲線 $y = xe^{-x}$ にちょうど 3 本の接線が引けるような a の値の範囲を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0$ を用いてもよい。

1 関数 $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ を微分せよ。

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{⑧} \end{aligned}$$

2 媒介変数 t を用いて表される関数 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 - \sin t \end{cases}$ について、 $\frac{dy}{dx}$ を t を用いて表せ。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sin t \\ \frac{dy}{dt} &= \cos t \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\cos t}{-\sin t} = -\tan t \quad \text{⑥} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= (-\tan t)' \cdot \left(\frac{1}{-\cos t} \right) \\ &= -\frac{1}{\cos^2 t} \cdot \left(-\frac{1}{\cos t} \right) \\ &= \frac{1}{\cos^3 t} \quad \text{⑦} \end{aligned}$$

3 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ 上の点 $(4, 9)$ における法線の方程式を求めよ。

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 5 \text{ の両辺を } x \text{ について微分} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' &= 0 \\ y' &= -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ \text{接線の傾きは} \\ -\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} &= -\frac{3}{2} \quad \text{③} \\ \text{よって法線の傾きは} \\ \frac{2}{3} \quad \text{④} \\ \text{法線の方程式は} \\ y - 9 &= \frac{2}{3}(x - 4) \\ y &= \frac{2}{3}x + \frac{19}{3} \quad \text{⑩} \end{aligned}$$

4 関数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} (x > 0)$ について、次の問いに答えよ。
(1) $f'(x)$ を求めよ。
(2) $f(x)$ の極値を求めよ。

$$\begin{aligned} x > 0 \text{ より} \\ f(x) &= x^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \log f(x) &= \log x^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log x \\ \text{両辺を } x \text{ について微分} \\ \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \\ f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{⑥} \end{aligned}$$

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...
$f(x)$		-	0	+
$f'(x)$		✓	極小	↗

$$\begin{aligned} \text{極小値} \\ e^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{e} \quad \text{⑥} \end{aligned}$$

5 関数 $y = x + \sqrt{1 - x^2}$ の最大値、最小値を求めよ。

$$\begin{aligned} \text{定義域は } -1 \leq x \leq 1 \\ y' &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \\ &= 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ y' = 0 \text{ とすると} \\ 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} &= 0 \\ 1 &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ x > 0 \text{ と仮定して両辺を乗ずると} \\ 1 &= \frac{x^2}{1-x^2} \\ 1-x^2 &= x^2 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ x > 0 \text{ より } x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{また } x < 0 \text{ の場合は } x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{よって } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき } y &= \sqrt{2} \text{ (最大値)} \\ x = -1 \text{ のとき } y &= -1 \text{ (最小値)} \quad \text{⑥} \end{aligned}$$

x	-1	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
y'			+	-	
y			↗	極大	↘

6 関数 $f(x) = \frac{x-a}{x^2+x+1}$ が $x = -1$ で極値を取るように、定数 a の値を定めよ。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-a}{x^2+x+1} \\ f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2+x+1) - (x-a)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2+2ax+1-a}{(x^2+x+1)^2} \\ x = -1 \text{ が極値であるから} \\ f'(-1) &= 0 \\ \frac{-(-1)^2+2a(-1)+1-a}{((-1)^2+(-1)+1)^2} &= 0 \\ \frac{-1-2a+1-a}{1} &= 0 \\ -3a &= 0 \\ a &= 0 \quad \text{②} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } a = 0 \text{ のとき } x &= -1 \text{ で極大値をとる} \\ \text{よって } a = 0 \text{ のとき } x &= 1 \text{ で極小値をとる} \end{aligned}$$

[7] $x < p < q$ のとき、不等式 $\log q - \log p < \frac{q-p}{e}$ を証明せよ。

$$q - p > 0 \text{ あり}$$

$$\log q - \log p < \frac{q-p}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log q - \log p}{q-p} < \frac{1}{e}$$

$f(x) = \log x$ とおくと $p < x < q$ は x の連続で微分可能な区間

平均値の定理より

$$\frac{f(q) - f(p)}{q-p} = f'(c) \quad (p < c < q) \text{ となる実数 } c \text{ が存在する。}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ あり}$$

$$\frac{f(q) - f(p)}{q-p} = \frac{1}{c}$$

$$e < p < c < q \text{ あり} \quad \frac{1}{c} < \frac{1}{e} \text{ となる。}$$

$$\frac{f(q) - f(p)}{q-p} = \frac{1}{c} < \frac{1}{e}$$

$$\text{よって } \frac{\log q - \log p}{q-p} < \frac{1}{e} \text{ となる。}$$

$$\log q - \log p < \frac{q-p}{e} \text{ は示された。}$$

(12)

[8] 関数 $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-2}$ のグラフをかけ。(凹凸も調べよ。)

$$y = x + \frac{1}{x-2} \text{ と変形してやる。}$$

$$y' = 1 + \frac{-1}{(x-2)^2}$$

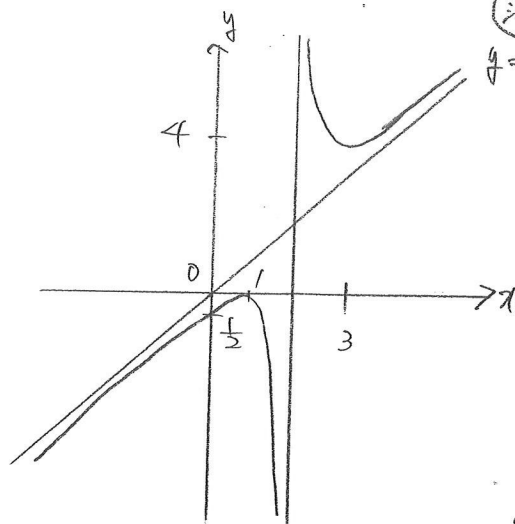
増減表をかく。

$$= 1 - \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x-2)^3}$$

x	1	2	3
y'	+	0	-
y''	-	-	+
y	1	0	2

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2+0} y = \infty, \lim_{x \rightarrow 2-0} y = -\infty$$



$x=2$
漸近線

漸近線が
 $y=x, x=2$
と交点 = 2 個ある

グラフ
4

全体で (12)

[9] 点 $P(0, a)$ から曲線 $y = xe^x$ にちょうど2本の接線が引けるような a の値の範囲を求めよ。

$$\text{接点 } (t, te^t) \text{ あり}$$

$$y' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x \cdot (1) = (1+x)e^x$$

$$\text{接線の方程式は } (1-t)e^{-t} = \dots$$

よって接線の方程式は

$$y - t \cdot e^{-t} = (1-t)e^{-t}(x-t)$$

とある。

$P(0, a)$ を通る。

$$a - t \cdot e^{-t} = (1-t)e^{-t} \cdot (-t)$$

$$a = t^2 \cdot e^{-t} \quad (*)$$

条件を満たすのは $(*)$ の実数解を3個もつ。

(x) の解の個数は

$$y=a \text{ と } y=t^2 \cdot e^{-t}$$

交点の個数と一致する。

$$y' = 2t \cdot e^{-t} + t^2 \cdot e^{-t} \cdot (-1) = (2t - t^2)e^{-t}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow t = 0, 2$$

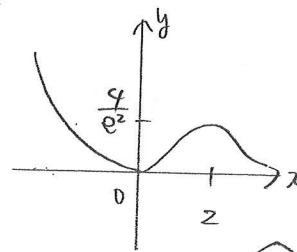
t	0	2
y'	-	+
y	0	2/e

$$\lim_{t \rightarrow 0} y = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \cdot e^{-t} = 0$$

グラフは次のようになります。

$$0 < a < \frac{4}{e^2}$$



(12)