第１回定期考査（微分法の応用）Ｈ２８．５．２０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ x の関数 y が，t を媒介変数として次のように表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数で表せ。$x=\sqrt{1-t^2}$, $y=t^2+1$

$\boxed{2}$ 次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。ただし a は正の定数である。$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$

$\boxed{3}$ 曲線 $y=(\log x)^2$ 上の y 座標が1 である点における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ 曲線 $y=\dfrac{e^x}{x}$ について，原点から引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

$\boxed{5}$ 関数 $y=2x-\sqrt{1-x^2}$ の最大値，最小値を求めよ。

$\boxed{6}$ 関数 $y=\dfrac{2(x^2+1)}{x^2-1}$ のグラフを書け。

$\boxed{7}$ a は定数とする。方程式 $2x-1=ae^{-x}$ の異なる実数解の個数を調べよ。

$\boxed{8}$ $x>0$ のとき，不等式 $\log(1+x)<\dfrac{1+x}{2}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{9}$ 上面の半径が 10 cm , 深さが 20 cm である直円錐形の容器が，その軸が鉛直になるように置かれている。この容器に毎秒 3 cm^3 の割合で静かに水を注ぐとき，水の深さが 6 cm になる瞬間における次の速さを求めよ。

(1) 水面の上昇する速さ

(2) 水面の面積の増加する速さ

$\boxed{10}$ a は定数とする。関数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}-2\ (1\leqq x\leqq 4)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{7}$ a は定数とする。方程式 $2x-1=ae^{-x}$ の異なる実数解の個数を調べよ。

$2x-1=ae^{-x}$

両辺に e^x をかけて

$a=(2x-1)e^x$

この方程式の解は

2つのグラフ

$\begin{cases} y=a \\ y=(2x-1)e^x \end{cases}$

の交点の個数に等しい

$y=(2x-1)e^x$

$y'=(2x-1)'e^x+(2x-1)(e^x)'$

$=2e^x+(2x-1)e^x$

$=(2x+1)e^x$

$y'=0$ は $x=-\frac{1}{2}$

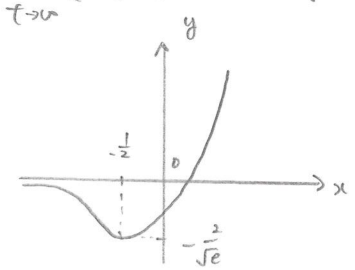
増減表

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	0 ↘	$-\frac{2}{\sqrt{e}}$	↗ ∞

$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}(2x-1)e^x=\infty$

$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{t\to\infty}(-2t-1)e^{-t}=0$.

グラフ



$-\frac{2}{\sqrt{e}}<a<0$ … 2個

$0\le a$，$a=-\frac{2}{\sqrt{e}}$ … 1個

$a<-\frac{2}{\sqrt{e}}$ … 0個 //

$\boxed{8}$ $x>0$ のとき，不等式 $\log(1+x)<\frac{1+x}{2}$ が成り立つことを示せ。

$f(x)=\log(1+x)-\frac{1+x}{2}$ とおく。

$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}$

$=\frac{2-(1+x)}{2(1+x)}$

$=\frac{1-x}{2(1+x)}$

$f'(x)=0$ となる x は $x=1$

増減表

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	↗	$f(1)$	↘

ここで $f(1)$ について

$f(1)=\log 2-1$

$=\log 2-\log e$

であり $2<e$ であるから

$f(1)<0$

つまり 増減表より

$x>0$ において $f(x)<0$

より

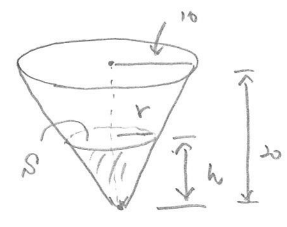
$\log(1+x)<\frac{1+x}{2}$

が成り立つ。//

$\boxed{9}$ 上面の半径が 10 cm，深さが 20 cm である直円錐形の容器が，その軸が鉛直になるように置かれている。この容器に毎秒 3 cm^3 の割合で静かに水を注ぐとき，水の深さが 6 cm になる瞬間における次の速さを求めよ。

(1) 水面の上昇する速さ

(2) 水面の面積の増加する速さ



(t 秒後)

t 秒後において

頂点から水面までの距離を h

水面の半径を r,

水面の面積を S とする。

すると 相似より $h:r=20:10$ つまり $h=2r$ …①

が成り立つ。また，$S=\pi r^2$ …② であり

毎秒 3 cm^3 で水を入れているので 水の入った部分の円錐の体積は $3t$ であるから

$\frac{1}{3}\times\pi r^2\times h=3t$

よって $r^2h=\frac{9}{\pi}t$ …③

である。

(1) $h=6$ となるとき，$\frac{dh}{dt}$ を求める。

①より $r=\frac{1}{2}h$ を③に代入して

$\left(\frac{1}{2}h\right)^2\times h=\frac{9}{\pi}t$ よって $h^3=\frac{36}{\pi}t$

この式の両辺を t で微分して

$\frac{d}{dt}h^3=\frac{36}{\pi}$ 連鎖公式より

$\frac{dh}{dt}\times\frac{d}{dh}h^3=\frac{36}{\pi}$ つまり $\frac{dh}{dt}\times 3h^2=\frac{36}{\pi}$ …④

④において $h=6$ を代入すると $\frac{dh}{dt}\times 3\times 6^2=\frac{36}{\pi}$

つまり $\frac{dh}{dt}=\frac{1}{3\pi}$ cm/s //

(2) $h=6$ となるとき $\frac{dS}{dt}$ を求める。

②において $r=\frac{1}{2}h$ を代入して $S=\frac{\pi}{4}h^2$

両辺 t で微分して

$\frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{4}\times\frac{d}{dt}h^2$ 連鎖公式より (1)より

$\frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{4}\times\frac{dh}{dt}\times\frac{d}{dh}h^2=\frac{\pi}{4}\times\frac{dh}{dt}\times 2h=\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{3\pi}\times 2\times 6$

$=1$ cm^2/s //

$\boxed{10}$ a は定数とする。関数 $f(x)=x+\frac{a}{x}-2\ (1\le x\le 4)$ の最小値を求めよ。

$f'(x)=1-\frac{a}{x^2}=\frac{x^2-a}{x^2}$

$a\le 0$ のとき，$f'(x)\ge 0$ より 単調増加。

よって最小値は $f(1)$

つまり $f(1)=1+\frac{a}{1}-2=a-1$

x	1	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(1)$	↗	$f(4)$

$a>0$ のとき $f'(x)=0$ となる x は $x=\pm\sqrt{a}$

y' $+$ $-\sqrt{a}$ $-$ $\sqrt{a}$ $+$

① $0<\sqrt{a}\le 1$ （つまり $0\le a<1$）のとき

定義域 $1\le x\le 4$ において $f'(x)\ge 0$ となるので

単調増加となるから，最小値は $f(1)=a-1$

② $1<\sqrt{a}<4$ （つまり $1<a<16$）のとき

x	1	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(\sqrt{a})$	↗	

$x=\sqrt{a}$ で最小より 最小値 $f(\sqrt{a})=\sqrt{a}+\frac{a}{\sqrt{a}}-2$

$=2\sqrt{a}-2$

③ $4\le\sqrt{a}$ （つまり $16\le a$）のとき

定義域 $1\le x\le 4$ において $f'(x)\le 0$ となるので

単調減少となるから 最小値は $f(4)=4+\frac{a}{4}-2$

$=\frac{a}{4}+2$

以上より，まとめると

$a\le 1$ のとき $a-1$

$1<a<16$ のとき $2\sqrt{a}-2$

$a>16$ のとき $\frac{a}{4}+2$ //

第１回定期考査（微分法の応用）Ｈ２８．５．２０ (各10点)　　(　)組(　)番　名前(こたえ)

1 x の関数 y が，t を媒介変数として次のように表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数で表せ。$x=\sqrt{1-t^2}$，$y=t^2+1$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\times(1-t^2)'$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\times(-2t)$

$=-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

$\dfrac{dy}{dt}=2t$

よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$=\dfrac{2t}{-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}$

$=-2\sqrt{1-t^2}$ //

2 次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。ただし a は正の定数である。$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

両辺 x で微分して

$\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\times\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\times\dfrac{dy}{dx}=0.$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\cdot\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$ //

3 曲線 $y=(\log x)^2$ 上の y 座標が1である点における接線の方程式を求めよ。

$1=(\log x)^2$

よって $\log x=\pm1$

$x=e,\ e^{-1}$

また $y'=2\log x\cdot(\log x)'$

$=\dfrac{2\log x}{x}$

である

・$x=e$ のとき

$y'=\dfrac{2\log e}{e}=\dfrac{2}{e}$

$y-1=\dfrac{2}{e}(x-e)$

より $y=\dfrac{2}{e}x-1$ //

・$x=e^{-1}$ のとき

$y'=\dfrac{2\log e^{-1}}{e^{-1}}=-2e$

$y-1=-2e\left(x-\dfrac{1}{e}\right)$

より $y=-2ex+3$ //

4 曲線 $y=\dfrac{e^x}{x}$ について，原点から引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

接点を $\left(t,\ \dfrac{e^t}{t}\right)$ とする

$y'=\dfrac{(e^x)'x-e^x\cdot(x)'}{x^2}$

$=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

より，接線の方程式は

$y-\dfrac{e^t}{t}=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}(x-t)\cdots(*)$

接線(*)が原点を通るので

$0-\dfrac{e^t}{t}=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}(-t)$

$-\dfrac{e^t}{t}=-\dfrac{e^t(t-1)}{t}$

$e^t\neq0$，$t\neq0$ より

$-1=-(t-1)$

よって $t=2$

接点は $\left(2,\ \dfrac{e^2}{2}\right)$

接線の方程式は

$y=\dfrac{e^2}{4}x$ //

5 関数 $y=2x-\sqrt{1-x^2}$ の最大値，最小値を求めよ。

定義域 $1-x^2\geqq0$

$-1\leqq x\leqq1$

また

$y'=2-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$

$=2+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\dfrac{2\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}}$

$y'=0$ となる x は

$2\sqrt{1-x^2}+x=0$

$2\sqrt{1-x^2}=-x$

左辺は正 より 右辺も正

よって $-x>0$ ∴ $x<0$

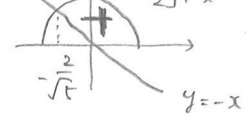
また 両辺2乗して

$4(1-x^2)=x^2$

$x^2=\dfrac{4}{5}$

$x<0$ より $x=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

($2\sqrt{1-x^2}-(-x)>0$



)

増減表

x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\cdots$	1
y'	/	$-$	0	$+$	/
y	-2	↘	$-\sqrt{5}$	↗	2

最大値 2 ($x=1$)

最小値 $-\sqrt{5}$ ($x=-\frac{2}{\sqrt{5}}$) //

($x=\sin\theta$ とおくと

$y=2\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$)

6 関数 $y=\dfrac{2(x^2+1)}{x^2-1}$ のグラフを書け。

定義域は $x\neq\pm1$

$y=\dfrac{2(x^2-1+2)}{x^2-1}=2+\dfrac{4}{x^2-1}$

$y'=0-4\times\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$

$=-\dfrac{8x}{(x^2-1)^2}$

$y''=-8\times\dfrac{(x)'(x^2-1)^2-x\{(x^2-1)^2\}'}{(x^2-1)^4}$

$=-8\times\dfrac{1\times(x^2-1)^2-x\cdot2(x^2-1)\cdot2x}{(x^2-1)^4}$

$=-8\times\dfrac{(x^2-1)-x\cdot2\cdot2x}{(x^2-1)^3}$

$=-8\times\dfrac{x^2-1-4x^2}{(x^2-1)^3}$

$=\dfrac{8(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$

$y'=0$ となる x は $x=0$

$y''=0$ となる x はなし

(y' 分母 >0　+　0　−　$-8x$)

y'' 分子 >0.

(分母　+　−　+　-1　1)

増減表.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	
y'	$+$	/	$+$	0	$-$	/	$-$
y''	$+$	/	$-$	$-$	$-$	/	$+$
y	2 ⤴ $+\infty$	/	$-\infty$ ⤴	-2	⤵ $-\infty$	/	$+\infty$ ⤵ 2

極限

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2+\frac{4}{x^2-1}\right)=2$

$\displaystyle\lim_{x\to-1-0}y=+\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to1+0}y=+\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}y=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to1-0}y=-\infty$

以上より漸近線は

$y=2$，

$x=\pm1$ の3本

グラフは下図