統一テスト（微分法･微分法の応用）R１．１１．１４　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=x[x]$ について， $x=0$ で微分可能であるかどうかを調べよ。

$\boxed{2}$ 次の関数の導関数を，定義に従って求めよ。　$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-4h)-f(a)}{h}$ を $f'(a)$ で表せ。

$\boxed{4}$ 媒介変数 t で表された曲線 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ について， $t=\dfrac{\pi}{6}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{5}$ 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ 上の， x 座標が 4 である点における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{6}$ 不等式 $e^x>1+x$ $(x>0)$ を証明せよ。

$\boxed{7}$ 次の関数を微分せよ。　$y=x^{e^x}$　$(x>0)$

$\boxed{8}$ 次の関数の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフの概形をかけ。　$y=xe^x$

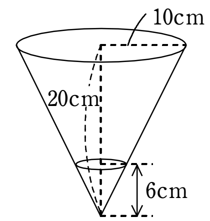
$\boxed{9}$ 次の関数の最大値，最小値を求めよ。　$y=x-2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

$\boxed{10}$ a を正の定数とする。不等式 $a^x \geqq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{11}$ $x \fallingdotseq 0$ のとき，関数 $\sqrt[4]{1+x}$ について，1 次の近似式を作れ。

$\boxed{12}$ 平均値の定理を用いて，次の極限を求めよ。　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\{\log(x+2)-\log x\}$

$\boxed{13}$ 上面の半径 10 cm，深さ 20 cm の直円錐形の容器が，右の図のように上面が水平になるように置かれている。この容器に毎秒 3 cm^3 の割合で静かに水を注ぐとき，水の深さが 6 cm になった瞬間における水面の高さ h の変化率，水面の面積 S の変化率を求めよ。



1 関数 $f(x)=x[x]$ について，$x=0$ で微分可能であるかどうかを調べよ。

解答　微分可能でない。

$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h[h]}{h}=[h]$ ……①

したがって

$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}[h]=0$

$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}[h]=-1$

よって，$h\to0$ のときの ① の極限はない。

したがって，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

(6)　答（対偶）

$f(x)$ が $x=a$ で連続でないならば $f(x)$ は $x=a$ で微分可能でない。

$\lim_{x\to+0}f(x)=0$，$\lim_{x\to-0}f(x)=0$

$x\times0$　　$x\times(-1)$

この方法は使えない。

2 次の関数の導関数を，定義に従って求めよ。　$f(x)=\frac{1}{x^2}$

解答　$-\frac{2}{x^3}$　(6)

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}\right\}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}\right\}$

$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{-2hx-h^2}{x^2(x+h)^2}\right\}=\lim_{h\to0}\frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2}=-\frac{2}{x^3}$

約分して hが消える部分を書くこと。

3 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，極限値 $\lim_{h\to0}\frac{f(a-4h)-f(a)}{h}$ を $f'(a)$ で表せ。

解答　$-4f'(a)$　(6)

$\lim_{h\to0}\frac{f(a-4h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{-4\cdot\frac{f(a-4h)-f(a)}{-4h}\right\}=-4f'(a)$

$4f'(a)$ ダメし.

公式　$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

プラス

4 媒介変数 t で表された曲線 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ について，$t=\frac{\pi}{6}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

解答　$y=-x+2$　(8)

$\frac{dx}{dt}=-\sqrt{3}\sin t$，$\frac{dy}{dt}=\cos t$ より　$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos t}{\sqrt{3}\sin t}$

であるから，$t=\frac{\pi}{6}$ のとき　$\frac{dy}{dx}=-1$　(4)

また，$t=\frac{\pi}{6}$ のとき　$x=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$，$y=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

よって，接線の方程式は

$y-\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{3}{2}\right)$　すなわち　$y=-x+2$

5 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ 上の，x 座標が 4 である点における接線の方程式を求めよ。

解答　$y=-\frac{3}{2}x+15$　(8)

$x=4$ のとき　$y=9$

曲線の方程式の両辺を x で微分すると　$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}y'=0$

$x\neq0$ のとき　$y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}$

よって，$x=4$，$y=9$ のとき　$y'=-\sqrt{\frac{9}{4}}=-\frac{3}{2}$　(4)

したがって，求める接線の方程式は

$y-9=-\frac{3}{2}(x-4)$　すなわち　$y=-\frac{3}{2}x+15$

6 不等式 $e^x>1+x$ $(x>0)$ を証明せよ。　(6)

$f(x)=e^x-(1+x)$ とすると　$f'(x)=e^x-1>0$ $(x>0)$

よって，$x\geqq0$ のとき $f(x)$ は単調に増加する。

また　$f(0)=0$

ゆえに　$f(x)>0$ $(x>0)$

すなわち　$e^x>1+x$ $(x>0)$

$f'(x)>0$　(4)

$f(0)=0$　(2)

ない者ダメし

7 次の関数を微分せよ。　$y=x^{e^x}$ $(x>0)$

解答　$x^{e^x}e^x\left(\log x+\frac{1}{x}\right)$　(8)

$x>0$ であるから　$x^{e^x}>0$

両辺の自然対数をとると　$\log y=e^x\log x$

両辺の関数を x で微分すると　$\frac{y'}{y}=e^x\log x+\frac{e^x}{x}$　(4)

よって　$y'=x^{e^x}e^x\left(\log x+\frac{1}{x}\right)$

8 次の関数の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフの概形をかけ。　$y=xe^x$

(10)

$f(x)=xe^x$ とする。

$f'(x)=(x+1)e^x$，$f''(x)=(x+2)e^x$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1$

$f''(x)=0$ とすると　$x=-2$

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる。

$f''(x)$ なし…　(4)

x	…	-2	…	-1	…
$f'(x)$	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	0	+	+	+
$f(x)$	↘	変曲点 $-\frac{2}{e^2}$	↘	極小 $-\frac{1}{e}$	↗

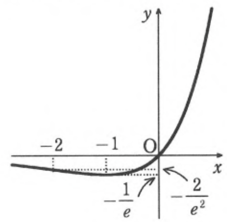
(2)

(2)

また　$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

さらに，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ より，x 軸はこの曲線の漸近線である。　(2)

以上から，この関数のグラフの概形は，[図] のようになる。



(4)

$\lim_{x\to-\infty}=0$ と書く者がいる.

158

9 次の関数の最大値，最小値を求めよ。　$y=x-2\sin x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

解答　$x=\frac{5}{3}\pi$ で最大値 $\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$，$x=\frac{\pi}{3}$ で最小値 $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$　8 (%4)

$y'=1-2\cos x$

$0<x<2\pi$ において $y'=0$ となる x の値は

$\cos x=\frac{1}{2}$ より　$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

y の増減表は右のようになる。

$x=0$ のとき　$y=0$

$x=\frac{\pi}{3}$ のとき　$y=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

$x=\frac{5}{3}\pi$ のとき　$y=\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$

$x=2\pi$ のとき　$y=2\pi$

x	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{5}{3}\pi$	…	2π
y'	╱	−	0	+	0	−	╱
y		↘	極小	↗	極大	↘	

$0<\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$，$\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}<2\pi$ であるから，y は

$x=\frac{5}{3}\pi$ で最大値 $\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$，$x=\frac{\pi}{3}$ で最小値 $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

をとる。

10 a を正の定数とする。不等式 $a^x\geqq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ。

8

解答　$a\geqq e^{\frac{1}{e}}$

$a^x\geqq x$ ……① とする。

$a>0$ であり，$x>0$ の範囲で考えるから，① の両辺の自然対数をとると

$x\log a\geqq\log x$　　ゆえに　$\log a\geqq\frac{\log x}{x}$ ……②

$f(x)=\frac{\log x}{x}$ とすると　$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると，$1-\log x=0$ から　$x=e$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	0	…	e	…
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	極大	↘

よって，$f(x)$ は $x=e$ で極大かつ最大となり，その値は　$f(e)=\frac{1}{e}$　6

したがって，② が $x>0$ の範囲で常に成り立つための条件は

$\log a\geqq\frac{1}{e}$　すなわち　$a\geqq e^{\frac{1}{e}}$

別解　$g(x)=\frac{x}{a^x}$ とし，$x>0$ のとき常に $g(x)\leqq 1$ が成り立つための条件を考える。

$$g'(x)=\frac{1\cdot a^x-x\cdot a^x\log a}{(a^x)^2}=\frac{1-x\log a}{a^x}$$

$g'(x)=0$ とすると　$x=\frac{1}{\log a}=\log_a e$

ゆえに，$x>0$ における $g(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	…	$\log_a e$	…
$g'(x)$		+	0	−
$g(x)$		↗	極大	↘

よって，$g(x)$ は $x=\log_a e$ で極大かつ最大となり，

その値は　$g(\log_a e)=\frac{\log_a e}{e}$

したがって，求める条件は　$\frac{\log_a e}{e}\leqq 1$

ゆえに，$\log_a e\leqq e$ から　$\frac{1}{\log a}\leqq e$

よって　$\log a\geqq\frac{1}{e}$　　すなわち　$a\geqq e^{\frac{1}{e}}$

11 $x\fallingdotseq 0$ のとき，関数 $\sqrt[4]{1+x}$ について，1 次の近似式を作れ。

8

解答　$1+\frac{1}{4}x$

$x\fallingdotseq 0$ のとき　$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

$f(x)=\sqrt[4]{1+x}$ とすると　$f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{(1+x)^3}}$

$f(0)=1$，$f'(0)=\frac{1}{4}$ であるから　$\sqrt[4]{1+x}\fallingdotseq 1+\frac{1}{4}x$

12 平均値の定理を用いて，次の極限を求めよ。　$\lim_{x\to\infty}x\{\log(x+2)-\log x\}$

8

解答　2

関数 $f(x)=\log x$ は，$x>0$ で微分可能で　$f'(x)=\frac{1}{x}$

区間 $[x,\ x+2]$ において平均値の定理を用いると

$\frac{\log(x+2)-\log x}{(x+2)-x}=\frac{1}{c}$ ……①，$x<c<x+2$　4

を満たす実数 c が存在する。

$x<c<x+2$

$\frac{1}{x}>\frac{1}{c}>\frac{1}{x+2}$

$\frac{2x}{x}>\frac{2x}{c}>\frac{2x}{x+2}$

① より　$x\{\log(x+2)-\log x\}=\frac{2x}{c}$

また，$0<x<c<x+2$ より　$\frac{2x}{x+2}<\frac{2x}{c}<\frac{2x}{x}=2$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{x}}=2$ であるから　$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{c}=2$

したがって　$\lim_{x\to\infty}x\{\log(x+2)-\log x\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{c}=2$

$\lim_{x\to\infty}x\{\log(x+2)-\log x\}$

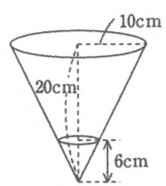
$=\lim_{x\to\infty}x\log\frac{x+2}{x}$

$=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

$=\lim_{x\to\infty}\log\left\{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2$

$=\log e^2=2$

13 上面の半径 10 cm，深さ 20 cm の直円錐形の容器が，右の図のように上面が水平になるように置かれている。この容器に毎秒 3 cm^3 の割合で静かに水を注ぐとき，水の深さが 6 cm になった瞬間における水面の高さ h の変化率，水面の面積 S の変化率を求めよ。



10 (%5)

解答　h の変化率，S の変化率の順に　$\frac{1}{3\pi}$ cm/s，1 cm^2/s

水を注ぎ始めてから t 秒後の水面の半径を r cm，水の深さを h cm $(0<h<20)$，水の量を V cm^3 とする。

$\frac{r}{h}=\frac{10}{20}$ より　$r=\frac{h}{2}$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2h=\frac{\pi}{12}h^3$$

$V=\frac{\pi}{12}h^3$ の両辺を t で微分すると　$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{4}h^2\cdot\frac{dh}{dt}$

ここで，$\frac{dV}{dt}=3$ であるから $h=6$ のとき　$3=\frac{\pi}{4}\cdot 6^2\cdot\frac{dh}{dt}$

よって　$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{3\pi}$ (cm/s)

水面の面積を S cm^2 とすると　$S=\pi r^2=\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}h^2$

$S=\frac{\pi}{4}h^2$ の両辺を t で微分すると　$\frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{2}h\cdot\frac{dh}{dt}$

$h=6$ のとき　$\frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{2}\cdot 6\cdot\frac{1}{3\pi}=1$ $(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

/42