統一テスト（微分法の応用）Ｈ３０．１２．１９　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 曲線 $y=\cos x$ 上の点A $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における接線と法線の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$ 平均値の定理を利用して，次のことを証明せよ。　$a<b$ のとき　$e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$

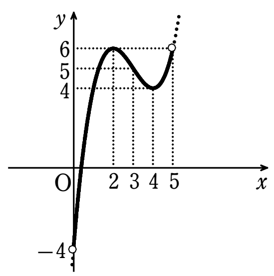
$\boxed{3}$ 次の関数の最大値，最小値を求めよ。　$y=\log(x^2+1)-\log x$　$\left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 3\right)$

$\boxed{4}$ 右の図は，関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(0<x<5)$ のグラフで，$x=2$ で極大，$x=4$ で極小となり，点 $(3,\ 5)$ は変曲点である。定数 a，b，c，d の値を求めずに，次のものを求めよ。

(1)　$y'>0$ となる x の値の範囲

(2)　$y''<0$ となる x の値の範囲

(3)　y' が最小となる x の値



$\boxed{5}$ 曲線 $y=x^4+ax^3+3ax^2+1$ が変曲点をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{6}$ 座標平面上を運動する点 P の座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として $x=\cos t+2$，$y=\sin t+1$ と表されるとき，時刻 t における P の速さ，加速度の大きさを求めよ。

$\boxed{7}$ $x\fallingdotseq 0$ のとき，次の関数について，1 次の近似式を作れ。　$\dfrac{1}{(1+x)^3}$

$\boxed{8}$ a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を調べよ。　$x\log x-a=0$

$\boxed{9}$ 次の関数のグラフの概形をかけ。　$y=\dfrac{x^2}{x-1}$

$\boxed{10}$ $0<a<b<2\pi$ のとき，不等式 $b\sin\dfrac{a}{2}>a\sin\dfrac{b}{2}$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{1}$ 曲線 $y=\cos x$ 上の点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における接線と法線の方程式を求めよ。

解答 接線の方程式，法線の方程式の順に

$$y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4\sqrt{2}},\quad y=\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$ （各5）

$f(x)=\cos x$ とすると，$f'(x)=-\sin x$ であるから　$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，接線の方程式は

$$y-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\qquad \text{すなわち}\quad y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

また，法線の方程式は

$$y-\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\qquad \text{すなわち}\quad y=\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

$\boxed{1}$ めちゃくちゃな答案多し，接線か法線か分からないもの ×

$\boxed{2}$ 平均値の定理を利用して，次のことを証明せよ。　$a<b$ のとき　$e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$

関数 $f(x)=e^x$ は微分可能で　$f'(x)=e^x$

よって，区間 $[a,\ b]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^c,\quad a<c<b$$ ← この式がないとダメ

を満たす c が存在する。

$a<c<b$ から　$e^a<e^c<e^b$　　したがって　$e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$　//

全くのでたらめ → ×

証明に不備 … △5

証明には不要だが
間違っていない記述 → O.K.

$\boxed{3}$ 次の関数の最大値，最小値を求めよ。　$y=\log(x^2+1)-\log x$　$\left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 3\right)$

解答 $x=3$ で最大値 $\log\dfrac{10}{3}$，$x=1$ で最小値 $\log 2$

$$y'=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2+1)}$$

$\dfrac{1}{2}<x<3$ において $y'=0$ となる x の値は　$x=1$　△3

y の増減表は右のようになる。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
y'	／	$-$	0	$+$	／
y		↘	極小	↗	

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$y=\log\dfrac{5}{4}-\log\dfrac{1}{2}=\log\dfrac{5}{2}$

$x=1$ のとき　$y=\log 2$

$x=3$ のとき　$y=\log 10-\log 3=\log\dfrac{10}{3}$

$\log\dfrac{5}{2}<\log\dfrac{10}{3}$ であるから，y は

$x=3$ で最大値 $\log\dfrac{10}{3}$，$x=1$ で最小値 $\log 2$　△3

をとる。　△4

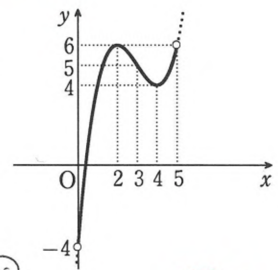
（ $\log 10-\log 3$ △3　　$\log 2-\log 1$ △2 ）

$\boxed{4}$ 右の図は，関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(0<x<5)$ のグラフで，$x=2$ で極大，$x=4$ で極小となり，点 $(3,\ 5)$ は変曲点である。定数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めずに，次のものを求めよ。

(1) $y'>0$ となる x の値の範囲

(2) $y''<0$ となる x の値の範囲

(3) y' が最小となる x の値



3　　3　　4

解答 (1) $0<x<2,\ 4<x<5$　(2) $0<x<3$　(3) $x=3$　　符号ミス △2

(1) 関数が増加する区間であるから　$0<x<2,\ 4<x<5$

(2) グラフが上に凸となる区間であるから　$0<x<3$

(3) $0<x<3$ で $y''<0$ であるから，y' はこの区間で減少する。
また，$3<x<5$ で $y''>0$ であるから，y' はこの区間で増加する。
したがって，$x=3$ で y' は最小となる。

あまりできていない

$\boxed{5}$ 曲線 $y=x^4+ax^3+3ax^2+1$ が変曲点をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答 $a<0,\ 8<a$

$y=x^4+ax^3+3ax^2+1$ ……①

$y'=4x^3+3ax^2+6ax$，$y''=12x^2+6ax+6a$

$y''=0$ とすると　$2x^2+ax+a=0$ ……②

曲線①が変曲点をもつためには，x の2次方程式②が実数解 α をもち，$x=\alpha$ の前後で y'' の符号が変わらなければならない。

したがって，②が異なる2つの実数解をもたなければならない。

逆に，②が異なる2つの実数解をもつとき，これらを α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，次の表より確かに曲線①は変曲点をもつ。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	下に凸	変曲点	上に凸	変曲点	下に凸

よって②の判別式を D とすると，$D>0$ が必要十分条件である。

$D=a^2-4\cdot 2\cdot a=a^2-8a$　△5

$D>0$　より　$a^2-8a>0$　これを解いて　$a<0,\ 8<a$

符号ミス △2

$\boxed{6}$ 座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として $x=\cos t+2$，$y=\sin t+1$ と表されるとき，時刻 t におけるPの速さ，加速度の大きさを求めよ。

解答 速さ，加速度の大きさの順に $1,1$　（各5）

時刻 t におけるPの速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とする。

$\vec{v}$ の成分は　$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=\cos t$

よって，速さ $|\vec{v}|$ は　$|\vec{v}|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}=1$

$\vec{\alpha}$ の成分は　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\cos t$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\sin t$

よって，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(-\cos t)^2+(-\sin t)^2}=1$

したがって　速さ1，加速度の大きさ1

$\boxed{7}$ $x\fallingdotseq 0$ のとき，次の関数について，1次の近似式を作れ。　$\dfrac{1}{(1+x)^3}$

解答 $1-3x$

$f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^3}$ とすると　$f'(x)=-\dfrac{3}{(1+x)^4}$

$f(0)=1$，$f'(0)=-3$ であるから　$\dfrac{1}{(1+x)^3}\fallingdotseq 1-3x$

不備 △2

8 a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を調べよ。　$x\log x-a=0$

解答　$a<-\frac{1}{e}$ のとき 0 個，$a=-\frac{1}{e}$ のとき 1 個，$-\frac{1}{e}<a<0$ のとき 2 個，
$a\geqq 0$ のとき 1 個

与えられた方程式より　$x\log x=a$

$f(x)=x\log x$ とすると　$f'(x)=\log x+1$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\frac{1}{e}$

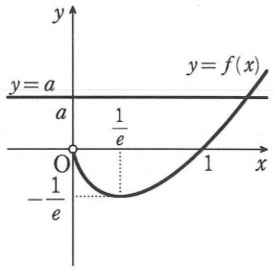
$f(x)$ の増減表は右のようになる。 △3

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	極小 $-\frac{1}{e}$	↗

また　$\lim_{x\to+0}f(x)=0$，$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する。



したがって　$a<-\frac{1}{e}$ のとき　0 個 △2

$a=-\frac{1}{e}$ のとき　1 個

$-\frac{1}{e}<a<0$ のとき　2 個 △2

$a\geqq 0$ のとき　1 個

△2

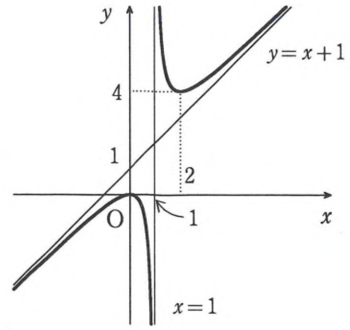
すべて正しいとき
イコールのミス (−2)　(a=0がない)

全然できていない。

9 次の関数のグラフの概形をかけ。　$y=\frac{x^2}{x-1}$

解答

x, y, 原点
不備 (−1)



△4

// 漸近線 △2

関数の定義域は $x\neq 1$ である。

$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ とすると $f(x)=x+1+\frac{1}{x-1}$　であるから

$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$，$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 2$

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる。

(極大値
極小値
ちがう (−2))

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	／	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	極大 0	↘	／	↘	極小 4	↗

△4

また，$\lim_{x\to1+0}f(x)=\infty$，$\lim_{x\to1-0}f(x)=-\infty$ であるから，直線 $x=1$ はこの曲線の漸近線である。

さらに，$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x+1)\}=0$，$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(x+1)\}=0$ であるから，直線 $y=x+1$ もこの曲線の漸近線である。

以上から，この関数のグラフの概形は，[上図] のようになる。

10 $0<a<b<2\pi$ のとき，不等式 $b\sin\frac{a}{2}>a\sin\frac{b}{2}$ が成り立つことを証明せよ。

解答　略

$0<a<b<2\pi$ のとき，不等式の各辺を $ab\,(>0)$ で割って

$$\frac{1}{a}\sin\frac{a}{2}>\frac{1}{b}\sin\frac{b}{2}\quad\cdots\cdots ①$$

ここで，$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{x}{2}$ とすると △3

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2x^2}\left(x\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\right)$$ △2

$g(x)=x\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}$ とすると

$$g'(x)=\cos\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=-\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$0<x<2\pi$ のとき，$0<\frac{x}{2}<\pi$ であるから　$g'(x)<0$ △3

よって，$g(x)$ は $0\leqq x<2\pi$ で単調に減少する。

また，$g(0)=0$ であるから，$0<x<2\pi$ において　$g(x)<0$　すなわち　$f'(x)<0$

よって，$f(x)$ は $0<x<2\pi$ において単調に減少する。

ゆえに，$0<a<b<2\pi$ のとき　$\frac{1}{a}\sin\frac{a}{2}>\frac{1}{b}\sin\frac{b}{2}$

すなわち，不等式 ① が成り立つから，与えられた不等式は成り立つ。 //