数学演習（第n次導関数･陰関数の微分･媒介変数表示の関数の微分）Ｒ１．６．２９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ (1)　次の関数の第 2 次導関数，第 3 次導関数を求めよ。

（ア）　$y=x^3-3x^2+2x-1$　　（イ）　$y=\sqrt[3]{x}$　　（ウ）　$y=\log(x^2+1)$

（エ）　$y=xe^{2x}$　　（オ）　$y=e^x\cos x$

(2)　$y=\cos x$ $(\pi<x<2\pi)$ の逆関数を $y=g(x)$ とするとき，$g'(x)$，$g''(x)$ をそれぞれ x の式で表せ。

$\boxed{2}$ (1)　$y=\log(1+\cos x)^2$ のとき，等式 $y''+2e^{-\frac{y}{2}}=0$ を証明せよ。

(2)　$y=e^{2x}\sin x$ に対して，$y''=ay+by'$ となるような定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{3}$ n を自然数とする。

(1)　$y=\sin 2x$ のとき，$y^{(n)}=2^n\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ であることを証明せよ。

(2)　$y=x^n$ の第 n 次導関数を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ について，等式

$$(1+x^2)f^{(n)}(x)+2nxf^{(n-1)}(x)+n(n-1)f^{(n-2)}(x)=0\ (n\geqq 2)$$

が成り立つことを証明せよ。ただし，$f^{(0)}(x)=f(x)$ とする。

$\boxed{5}$ $f(x)=x^2e^x$ とする。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) 定数 a_n，b_n を用いて，$f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$ ($n=1$，2，3，……) と表すとき，a_{n+1}，b_{n+1} をそれぞれ a_n，b_n を用いて表せ。

(3) $f^{(n)}(x)$ を求めよ。

$\boxed{6}$ 方程式 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ …… ① で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ をそれぞれ x と y を用いて表せ。

$\boxed{7}$ 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ をそれぞれ x と y を用いて表せ。

(1) $y^2=x$　(2) $x^2-y^2=4$　(3) $(x+1)^2+y^2=9$　(4) $3xy-2x+5y=0$

$\boxed{8}$ x の関数 y が，t，θ を媒介変数として，次の式で表されるとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を t，θ の関数として表せ。ただし，(2) の a は正の定数とする。

(1) $\begin{cases} x=t^3+2 \\ y=t^2-1 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$

$\boxed{9}$ x の関数 y が，t，θ を媒介変数として，次の式で表されるとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を t，θ の関数として表せ。

(1) $\begin{cases} x=2t^3+1 \\ y=t^2+t \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=t^2+2 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x=3\cos^3\theta \\ y=2\sin^3\theta \end{cases}$

$\boxed{10}$ (1)　$\cos x = k\cos y$ $(0<x<\pi,\ 0<y<\pi,\ k$ は $k>1$ の定数$)$ が成り立つとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を x の式で表せ。

(2)　サイクロイド $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$ について，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

1 (1)　次の関数の第２次導関数，第３次導関数を求めよ。

（ア）　$y=x^3-3x^2+2x-1$　（イ）　$y=\sqrt[3]{x}$　（ウ）　$y=\log(x^2+1)$

（エ）　$y=xe^{2x}$　（オ）　$y=e^x\cos x$

(2)　$y=\cos x$ $(\pi<x<2\pi)$ の逆関数を $y=g(x)$ とするとき，$g'(x)$，$g''(x)$ をそれぞれ x の式で表せ。

解答　(1)（ア）　$y''=6x-6$，$y'''=6$　（イ）　$y''=-\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$，$y'''=\dfrac{10}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$

（ウ）　$y''=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$，$y'''=\dfrac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

（エ）　$y''=4(x+1)e^{2x}$，$y'''=4(2x+3)e^{2x}$

（オ）　$y''=-2e^x\sin x$，$y'''=-2e^x(\sin x+\cos x)$

(2)　$g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$g''(x)=\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

解説

(1)（ア）　$y'=3x^2-6x+2$ であるから　$y''=6x-6$，$y'''=6$

（イ）　$y'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ であるから

$$y''=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}\right)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y'''=-\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}}\right)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}=\frac{10}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$$

（ウ）　$y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$ であるから

$$y''=\frac{2(x^2+1-x\cdot 2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$y'''=\{2(1-x^2)(x^2+1)^{-2}\}'=2(-2x)(x^2+1)^{-2}+2(1-x^2)(-2)(x^2+1)^{-3}\cdot 2x$$

$$=-4x(x^2+1)^{-2}-8x(1-x^2)(x^2+1)^{-3}$$

$$=-4x(x^2+1)^{-3}\{x^2+1+2(1-x^2)\}=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

（エ）　$y'=e^{2x}+2xe^{2x}=(2x+1)e^{2x}$ であるから

$$y''=2e^{2x}+2(2x+1)e^{2x}=4(x+1)e^{2x}$$

$$y'''=4e^{2x}+8(x+1)e^{2x}=4(2x+3)e^{2x}$$

（オ）　$y'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$ であるから

$$y''=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)=-2e^x\sin x$$

$$y'''=-2e^x\sin x-2e^x\cos x=-2e^x(\sin x+\cos x)$$

(2)　条件より，$y=g(x)$ に対して $x=\cos y$ が成り立つから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=-\frac{1}{\sin y}$$

$\pi<y<2\pi$ であるから　$\sin y<0$

ゆえに　$\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$

よって　$g'(x)=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sin y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

また　$g''(x)=\left\{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}'=-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)=\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

2 (1)　$y=\log(1+\cos x)^2$ のとき，等式 $y''+2e^{-\frac{y}{2}}=0$ を証明せよ。

(2)　$y=e^{2x}\sin x$ に対して，$y''=ay+by'$ となるような定数 a，b の値を求めよ。

解答　(1)　略　(2)　$a=-5$，$b=4$

解説

(1)　$y=2\log(1+\cos x)$ であるから　$y'=2\cdot\dfrac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}=-\dfrac{2\sin x}{1+\cos x}$

よって　$y''=-\dfrac{2\{\cos x(1+\cos x)-\sin x(-\sin x)\}}{(1+\cos x)^2}$

$$=-\frac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}=-\frac{2}{1+\cos x}$$

また，$\dfrac{y}{2}=\log(1+\cos x)$ であるから　$e^{\frac{y}{2}}=1+\cos x$

ゆえに　$2e^{-\frac{y}{2}}=\dfrac{2}{e^{\frac{y}{2}}}=\dfrac{2}{1+\cos x}$

よって　$y''+2e^{-\frac{y}{2}}=-\dfrac{2}{1+\cos x}+\dfrac{2}{1+\cos x}=0$

(2)　$y'=2e^{2x}\sin x+e^{2x}\cos x=e^{2x}(2\sin x+\cos x)$

$y''=2e^{2x}(2\sin x+\cos x)+e^{2x}(2\cos x-\sin x)$

$=e^{2x}(3\sin x+4\cos x)$　……①

ゆえに　$ay+by'=ae^{2x}\sin x+be^{2x}(2\sin x+\cos x)$

$=e^{2x}\{(a+2b)\sin x+b\cos x\}$　……②

$y''=ay+by'$ に①，②を代入して

$e^{2x}(3\sin x+4\cos x)=e^{2x}\{(a+2b)\sin x+b\cos x\}$　……③

③は x の恒等式であるから，$x=0$ を代入して　$4=b$

また，$x=\dfrac{\pi}{2}$ を代入して　$3e^{\pi}=e^{\pi}(a+2b)$

これを解いて　$a=-5$，$b=4$

このとき　(③の右辺)$=e^{2x}\{(-5+2\cdot 4)\sin x+4\cos x\}=$(③の左辺)

したがって　$a=-5$，$b=4$

3 n を自然数とする。

(1)　$y=\sin 2x$ のとき，$y^{(n)}=2^n\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ であることを証明せよ。

(2)　$y=x^n$ の第 n 次導関数を求めよ。

解答　(1)　略　(2)　$y^{(n)}=n!$

解説

(1)　$y^{(n)}=2^n\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ ……①とする。

[1]　$n=1$ のとき　$y'=2\cos 2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると　$y^{(k)}=2^k\sin\left(2x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$　……②

$n=k+1$ のときを考えると，②の両辺を x で微分して

$$\frac{d}{dx}y^{(k)}=2^{k+1}\cos\left(2x+\frac{k\pi}{2}\right)$$

ゆえに　$y^{(k+1)}=2^{k+1}\sin\left(2x+\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=2^{k+1}\sin\left\{2x+\dfrac{(k+1)\pi}{2}\right\}$

よって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

[1]，[2]から，すべての自然数 n について①は成り立つ。

(2)　$n=1$，2，3のとき，順に

$$y'=x'=1,\quad y''=(x^2)''=(2x)'=2\cdot 1,\quad y'''=(x^3)'''=3(x^2)''=3\cdot 2\cdot 1$$

したがって，$y^{(n)}=n!$ ……①と推測できる。

[1]　$n=1$ のとき　$y'=1!$ であるから，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$y^{(k)}=k!\quad すなわち\quad \frac{d^k}{dx^k}x^k=k!$$

$n=k+1$ のときを考えると，$y=x^{k+1}$ で，$(x^{k+1})'=(k+1)x^k$ であるから

$$y^{(k+1)}=\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{d}{dx}x^{k+1}\right)=\frac{d^k}{dx^k}\{(k+1)x^k\}=(k+1)\frac{d^k}{dx^k}x^k=(k+1)k!=(k+1)!$$

よって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

[1]，[2]から，すべての自然数 n について①は成り立ち　$y^{(n)}=n!$

4 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ について，等式

$$(1+x^2)f^{(n)}(x)+2nxf^{(n-1)}(x)+n(n-1)f^{(n-2)}(x)=0\ (n\geqq 2)$$

が成り立つことを証明せよ。ただし，$f^{(0)}(x)=f(x)$ とする。

解答　略

解説

証明したい等式を①とする。

[1]　$f(x)=f^{(0)}(x)=(1+x^2)^{-1}$，　$f'(x)=-(1+x^2)^{-2}\cdot 2x$，

$f''(x)=(1+x^2)^{-3}\cdot 8x^2-(1+x^2)^{-2}\cdot 2$

よって，$n=2$ のとき

(①の左辺)$=(1+x^2)f''(x)+4xf'(x)+2f(x)$

$=(1+x^2)^{-2}\cdot 8x^2-(1+x^2)^{-1}\cdot 2-(1+x^2)^{-2}\cdot 8x^2+(1+x^2)^{-1}\cdot 2=0$

したがって，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ $(k\geqq 2)$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$(1+x^2)f^{(k)}(x)+2kxf^{(k-1)}(x)+k(k-1)f^{(k-2)}(x)=0$$

$n=k+1$ のときを考えると，この両辺を x で微分して

$$2xf^{(k)}(x)+(1+x^2)f^{(k+1)}(x)+2kf^{(k-1)}(x)+2kxf^{(k)}(x)+k(k-1)f^{(k-1)}(x)=0$$

整理すると　$(1+x^2)f^{(k+1)}(x)+2(k+1)xf^{(k)}(x)+(k+1)kf^{(k-1)}(x)=0$

よって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

[1]，[2]から，$n\geqq 2$ のすべての自然数 n について①は成り立つ。

5 $f(x)=x^2e^x$ とする。

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　定数 a_n，b_n を用いて，$f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ と表すとき，a_{n+1}，b_{n+1} をそれぞれ a_n，b_n を用いて表せ。

(3)　$f^{(n)}(x)$ を求めよ。

解答　(1)　$f'(x)=(x^2+2x)e^x$　(2)　$a_{n+1}=a_n+2$，$b_{n+1}=a_n+b_n$

(3)　$f^{(n)}(x)=(x^2+2nx+n^2-n)e^x$

解説

(1)　$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$

(2)　$f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$ ……① とする。

①の両辺を x で微分すると

$$f^{(n+1)}(x)=(2x+a_n)e^x+(x^2+a_nx+b_n)e^x$$
$$=\{x^2+(a_n+2)x+a_n+b_n\}e^x \quad ……②$$

また，①から

$$f^{(n+1)}(x)=(x^2+a_{n+1}x+b_{n+1})e^x \quad ……③$$

②，③の右辺の係数をそれぞれ比較して

$$a_{n+1}=a_n+2,\quad b_{n+1}=a_n+b_n$$

(3)　(1)から　$a_1=2$，$b_1=0$

$a_{n+1}-a_n=2$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=2$，公差 2 の等差数列であるから

$$a_n=2+(n-1)\cdot 2=2n$$

よって　$b_{n+1}=b_n+2n$

$b_{n+1}-b_n=2n$ より，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=0$，階差数列 $\{2n\}$ の数列であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}2k=2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)=n^2-n$$

$b_1=0$ であるから，これは $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$b_n=n^2-n$

したがって　$f^{(n)}(x)=(x^2+2nx+n^2-n)e^x$

$\boxed{6}$ 方程式 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ ……① で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ をそれぞれ x と y を用いて表せ。

解答　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9x}{4y}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{81}{4y^3}$

解説

①の両辺を x で微分すると　$\dfrac{2x}{4}-\dfrac{2y}{9}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$y\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9x}{4y}$

また，この両辺を x で微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{9}{4}\cdot\frac{1\cdot y-xy'}{y^2}=\frac{9}{4}\cdot\frac{y-x\cdot\frac{9x}{4y}}{y^2}=\frac{9(4y^2-9x^2)}{16y^3}=\frac{9\cdot(-36)}{16y^3}=-\frac{81}{4y^3}$$

$\boxed{7}$ 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ をそれぞれ x と y を用いて表せ。

(1)　$y^2=x$　　(2)　$x^2-y^2=4$　　(3)　$(x+1)^2+y^2=9$　　(4)　$3xy-2x+5y=0$

解答　$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の順に　(1)　$\dfrac{1}{2y}$，$-\dfrac{1}{4y^3}$　(2)　$\dfrac{x}{y}$，$-\dfrac{4}{y^3}$

(3)　$-\dfrac{x+1}{y}$，$-\dfrac{9}{y^3}$　(4)　$\dfrac{2-3y}{3x+5}$，$\dfrac{6(3y-2)}{(3x+5)^2}$

解説

(1)　$y^2=x$ の両辺を x で微分すると　$2y\dfrac{dy}{dx}=1$

よって，$y\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2y}$

また，この両辺を x で微分すると　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{y'}{2y^2}=-\dfrac{1}{2y^2}\cdot\dfrac{1}{2y}=-\dfrac{1}{4y^3}$

(2)　$x^2-y^2=4$ の両辺を x で微分すると　$2x-2y\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$y\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$

また，この両辺を x で微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1\cdot y-xy'}{y^2}=\frac{y-\frac{x^2}{y}}{y^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}=-\frac{4}{y^3}$$

(3)　$(x+1)^2+y^2=9$ の両辺を x で微分すると　$2(x+1)+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$y\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+1}{y}$

また，この両辺を x で微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1\cdot y-(x+1)y'}{y^2}=-\frac{y+\frac{(x+1)^2}{y}}{y^2}=-\frac{y^2+(x+1)^2}{y^3}=-\frac{9}{y^3}$$

(4)　$3xy-2x+5y=0$ の両辺を x で微分すると　$3\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)-2+5\dfrac{dy}{dx}=0$

よって　$(3x+5)\dfrac{dy}{dx}=2-3y$　　ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2-3y}{3x+5}$

また，この両辺を x で微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-3y'(3x+5)-(2-3y)\cdot 3}{(3x+5)^2}=\frac{-3\cdot\frac{2-3y}{3x+5}\cdot(3x+5)-3(2-3y)}{(3x+5)^2}$$
$$=\frac{6(3y-2)}{(3x+5)^2}$$

$\boxed{8}$ x の関数 y が，t，θ を媒介変数として，次の式で表されるとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を t，θ の関数として表せ。ただし，(2) の a は正の定数とする。

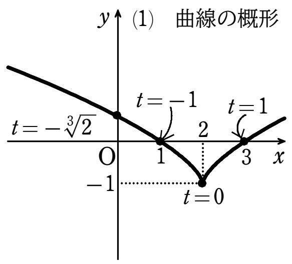
(1)　$\begin{cases}x=t^3+2\\y=t^2-1\end{cases}$　　(2)　$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$

解答　(1)　$\dfrac{2}{3t}$　(2)　$\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

解説

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=3t^2$，$\dfrac{dy}{dt}=2t$

よって，$t\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t}{3t^2}=\dfrac{2}{3t}$



(1)　曲線の概形

(2)　$\dfrac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$，$\dfrac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$

よって，$\cos\theta\neq 1$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$\boxed{9}$ x の関数 y が，t，θ を媒介変数として，次の式で表されるとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を t，θ の関数として表せ。

(1)　$\begin{cases}x=2t^3+1\\y=t^2+t\end{cases}$　　(2)　$\begin{cases}x=\sqrt{1-t^2}\\y=t^2+2\end{cases}$　　(3)　$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$　　(4)　$\begin{cases}x=3\cos^3\theta\\y=2\sin^3\theta\end{cases}$

解答　(1)　$\dfrac{2t+1}{6t^2}$　(2)　$-2\sqrt{1-t^2}$　(3)　$-\dfrac{3\cos\theta}{2\sin\theta}$　(4)　$-\dfrac{2}{3}\tan\theta$

解説

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=6t^2$，$\dfrac{dy}{dt}=2t+1$

よって，$t\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t+1}{6t^2}$

(2)　$t\neq\pm 1$ のとき　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}=-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$，$\dfrac{dy}{dt}=2t$

よって，$t\neq 0$，$t\neq\pm 1$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t}{-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}=-2\sqrt{1-t^2}$

(3)　$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=3\cos\theta$

よって，$\sin\theta\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3\cos\theta}{2\sin\theta}$

(4)　$\dfrac{dx}{d\theta}=3\cdot 3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)$，$\dfrac{dy}{d\theta}=2\cdot 3\sin^2\theta\cdot\cos\theta$

よって，$\sin\theta\cos\theta\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cdot 3\sin^2\theta\cos\theta}{-3\cdot 3\cos^2\theta\sin\theta}=-\dfrac{2}{3}\tan\theta$

$\boxed{10}$ (1)　$\cos x=k\cos y$　$(0<x<\pi,\ 0<y<\pi,\ k$ は $k>1$ の定数$)$ が成り立つとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を x の式で表せ。

(2)　サイクロイド $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$ について，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

解答　(1)　$\dfrac{\sin x}{\sqrt{k^2-\cos^2x}}$　(2)　$-\dfrac{1}{(1-\cos t)^2}$

解説

(1)　$\cos x=k\cos y$ の両辺を x で微分すると　$-\sin x=(-k\sin y)\dfrac{dy}{dx}$

条件から　$\sin y>0$，$k>1$

ゆえに　$k\sin y=k\sqrt{1-\cos^2y}=\sqrt{k^2-\cos^2x}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin x}{k\sin y}=\dfrac{\sin x}{\sqrt{k^2-\cos^2x}}$

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=\sin t$

よって，$\cos t\neq 1$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

ゆえに　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\sin t}{1-\cos t}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}$

$$=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{1-\cos t}$$
$$=\frac{\cos t-1}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{1-\cos t}=-\frac{1}{(1-\cos t)^2}$$