数学演習（微分係数と極限）Ｒ１．６．２８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ を用いて，次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)$ は微分可能で，$f'(0)=\alpha$ とする。次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(\sin x)}{x}$

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ は微分可能であるとする。

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{\sin h}$ を $f'(x)$ を用いて表せ。

(2) $f'(0)=2$ であるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(-x)}{x}$ を求めよ。

$\boxed{4}$ (1) 次の極限値を求めよ。ただし，α は定数とする。

(ア) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$　　(イ) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{x\sin x-\alpha\sin\alpha}{\sin(x-\alpha)}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ であることを用いて，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{e^{(h+1)^2}-e^{h^2+1}}{h}$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の極限値を求めよ。ただし，a は定数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3^{2x}-1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\log\frac{x^x}{a^a}$ $(a>0)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{a+x}-e^a}{x}$

$\boxed{6}$ a を実数とする。すべての実数 x で定義された関数 $f(x)=|x|(e^{2x}+a)$ は $x=0$ で微分可能であるとする。

(1) a および $f'(0)$ の値を求めよ。

(2) 右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}$ を求めよ。更に，$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ。

$\boxed{7}$ 次の極限値を求めよ。ただし，a は正の定数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(a+h)-\log(a-h)}{h}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^{a}}{\log(a-h)-\log a}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^2\sin^2 x-x^2\sin^2 a}{x-a}$

数学演習（微分係数と極限）Ｒ１．６．２８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1 $\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ を用いて，次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$　　(3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$

解答　(1) e^{-1}　(2) e^{-2}　(3) e^{-1}

解説

(1) $-x=h$ とおくと，$x\to0$ のとき　$h\to0$

よって　$\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{h\to0}(1+h)^{-\frac{1}{h}}=\lim_{h\to0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-1}=e^{-1}$

(2) $-\frac{1}{x}=h$ とおくと，$x\to\infty$ のとき　$h\to-0$

よって　$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{h\to-0}(1+h)^{-\frac{2}{h}}=\lim_{h\to-0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-2}=e^{-2}$

(3) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}$

$\frac{1}{x}=h$ とおくと，$x\to\infty$ のとき　$h\to+0$

よって　$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\lim_{h\to+0}(1+h)^{-\frac{1}{h}}=\lim_{h\to+0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-1}=e^{-1}$

2 関数 $f(x)$ は微分可能で，$f'(0)=\alpha$ とする。次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h}$　　(2) $\lim_{x\to0}\frac{f(3x)-f(\sin x)}{x}$

解答　(1) 0　(2) 2α

解説

(1) $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot h=f'(a)\cdot0=0$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{f(3x)-f(\sin x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(3x)-f(0)-\{f(\sin x)-f(0)\}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(3x)-f(0)}{3x-0}\cdot3-\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x-0}\cdot\frac{\sin x}{x}\right\}$

$=3\lim_{x\to0}\frac{f(3x)-f(0)}{3x-0}-\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x-0}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$

$=3f'(0)-f'(0)\cdot1=2f'(0)=2\alpha$

3 関数 $f(x)$ は微分可能であるとする。

(1) 極限値 $\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{\sin h}$ を $f'(x)$ を用いて表せ。

(2) $f'(0)=2$ であるとき，極限値 $\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(-x)}{x}$ を求めよ。

解答　(1) $2f'(x)$　(2) 6

解説

(1) $\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{\sin h}=\lim_{h\to0}\left\{2\cdot\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot\frac{h}{\sin h}\right\}$

$=2\cdot f'(x)\cdot1=2f'(x)$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(0)-\{f(-x)-f(0)\}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(2x)-f(0)}{2x-0}\cdot2+\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}\right\}$

$=f'(0)\cdot2+f'(0)=3f'(0)=3\cdot2=6$

4 (1) 次の極限値を求めよ。ただし，α は定数とする。

(ア) $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$　　(イ) $\lim_{x\to\alpha}\frac{x\sin x-\alpha\sin\alpha}{\sin(x-\alpha)}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ であることを用いて，極限値 $\lim_{h\to0}\frac{e^{(h+1)^2}-e^{h^2+1}}{h}$ を求めよ。

解答　(1) (ア) $\log 2$　(イ) $\sin\alpha+\alpha\cos\alpha$　(2) $2e$

解説

(1) (ア) $f(x)=2^x$ とすると　$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x-2^0}{x-0}=f'(0)$

$f'(x)=2^x\log 2$ であるから　$f'(0)=2^0\log 2=\log 2$

したがって　$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=\log 2$

(イ) $f(x)=x\sin x$ とすると

$\lim_{x\to\alpha}\frac{x\sin x-\alpha\sin\alpha}{\sin(x-\alpha)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{x\sin x-\alpha\sin\alpha}{x-\alpha}\cdot\frac{x-\alpha}{\sin(x-\alpha)}=f'(\alpha)\cdot1=f'(\alpha)$

$f'(x)=\sin x+x\cos x$ であるから　(与式)$=\sin\alpha+\alpha\cos\alpha$

(2) $\lim_{h\to0}\frac{e^{(h+1)^2}-e^{h^2+1}}{h}=\lim_{h\to0}\left(e^{h^2+1}\cdot\frac{e^{2h}-1}{h}\right)=\lim_{h\to0}\left(2e^{h^2+1}\cdot\frac{e^{2h}-1}{2h}\right)$

$=2\lim_{h\to0}e^{h^2+1}\cdot\lim_{h\to0}\frac{e^{2h}-1}{2h}=2e\cdot1=2e$

5 次の極限値を求めよ。ただし，a は定数とする。

(1) $\lim_{x\to0}\frac{3^{2x}-1}{x}$　　(2) $\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}$　　(3) $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\log\frac{x^x}{a^a}$ $(a>0)$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$　　(5) $\lim_{x\to0}\frac{e^{a+x}-e^a}{x}$

解答　(1) $2\log 3$　(2) 1　(3) $\log a+1$　(4) 2　(5) e^a

解説

(1) $f(x)=3^{2x}$ とすると　(与式)$=\lim_{x\to0}\frac{3^{2x}-3^0}{x-0}=f'(0)$

$f'(x)=3^{2x}\cdot2\log 3$ であるから　$f'(0)=2\log 3$

よって　(与式)$=2\log 3$

(2) $f(x)=\log x$ とすると　(与式)$=\lim_{x\to1}\frac{\log x-\log 1}{x-1}=f'(1)$

$f'(x)=\frac{1}{x}$ であるから　$f'(1)=1$　　よって　(与式)$=1$

別解　$x-1=t$ とおくと

(与式)$=\lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t}=\lim_{t\to0}\log(1+t)^{\frac{1}{t}}=\log e=1$

(3) $f(x)=\log x^x$ とすると　(与式)$=\lim_{x\to a}\frac{\log x^x-\log a^a}{x-a}=f'(a)$

$f'(x)=(x\log x)'=\log x+1$ であるから　$f'(a)=\log a+1$

よって　(与式)$=\log a+1$

(4) $f(x)=e^x$ とすると，$f'(x)=e^x$ であるから

(与式)$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-(e^{-x}-1)}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-e^0}{x-0}+\frac{e^{-x}-e^0}{-x-0}\right)=f'(0)+f'(0)=1+1=2$

(5) (与式)$=\lim_{x\to0}\frac{e^a(e^x-1)}{x}=\lim_{x\to0}\left(e^a\cdot\frac{e^x-1}{x}\right)$

$f(x)=e^x$ とすると，$f'(x)=e^x$ であるから

$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=f'(0)=1$

よって　(与式)$=e^a\cdot1=e^a$

6 a を実数とする。すべての実数 x で定義された関数 $f(x)=|x|(e^{2x}+a)$ は $x=0$ で微分可能であるとする。

(1) a および $f'(0)$ の値を求めよ。

(2) 右側極限 $\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}$ を求めよ。更に，$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ。

解答　(1) $a=-1$，$f'(0)=0$　(2) $\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}=4$，証明略

解説

(1) $f(0)=|0|(e^0+a)=0$ である。

$x>0$ のとき，$f(x)=x(e^{2x}+a)$ であるから

$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h(e^{2h}+a)}{h}=\lim_{h\to+0}(e^{2h}+a)=1+a$

$x<0$ のとき，$f(x)=-x(e^{2x}+a)$ であるから

$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h(e^{2h}+a)}{h}=\lim_{h\to-0}\{-(e^{2h}+a)\}=-(1+a)$

$f(x)$ は $x=0$ で微分可能であるから，$f'(0)$ が存在し

$f'(0)=\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

よって　$1+a=-(1+a)$　　これを解いて　$a=-1$

このとき　$f'(0)=0$

(2) $x>0$ のとき，$f(x)=x(e^{2x}-1)$ であり

$f'(x)=1\cdot(e^{2x}-1)+x\cdot2e^{2x}=(2x+1)e^{2x}-1$

よって　$\frac{f'(x)}{x}=\frac{(2x+1)e^{2x}-1}{x}=2e^{2x}+2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}$

ゆえに　$\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to+0}\left(2e^{2x}+2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)=2\cdot1+2\cdot1=4$

よって　$\lim_{h\to+0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{f'(h)}{h}=4$

また，$x<0$ のとき，$f(x)=-x(e^{2x}-1)$ であり

$\frac{f'(x)}{x}=\frac{-(2x+1)e^{2x}+1}{x}=-2e^{2x}-2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}$

ゆえに　$\lim_{x\to-0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to-0}\left(-2e^{2x}-2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)=-2\cdot1-2\cdot1=-4$

よって　$\lim_{h\to-0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f'(h)}{h}=-4$

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h} \neq \lim_{h\to-0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}$ であるから，$f''(0)$ は存在しない。
つまり，$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

$\boxed{7}$ 次の極限値を求めよ。ただし，a は正の定数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\log(a+h)-\log(a-h)}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{e^{a+h}-e^{a}}{\log(a-h)-\log a}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^2\sin^2 x - x^2\sin^2 a}{x-a}$

解答 (1) $\dfrac{2}{a}$　(2) $-ae^a$　(3) $2a\sin a(a\cos a-\sin a)$

解説

(1) $f(x)=\log x$ とすると，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ であるから

$$(与式)=\lim_{h\to0}\frac{\log(a+h)-\log a-\{\log(a-h)-\log a\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{\log(a+h)-\log a}{h}+\frac{\log(a-h)-\log a}{-h}\right\}$$
$$=f'(a)+f'(a)=\frac{2}{a}$$

(2) $f(x)=e^x$，$g(x)=\log x$ とすると，$f'(x)=e^x$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}$ であるから

$$(与式)=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{e^{a+h}-e^a}{h}}{-\dfrac{\log(a-h)-\log a}{-h}}=-\frac{f'(a)}{g'(a)}=-\frac{e^a}{\dfrac{1}{a}}=-ae^a$$

(3) $f(x)=\sin^2 x$ とすると，$f'(x)=2\sin x\cos x$ であるから

$$(与式)=\lim_{x\to a}\frac{a^2(\sin^2 x-\sin^2 a)-(x^2-a^2)\sin^2 a}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\left\{a^2\cdot\frac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}-(x+a)\sin^2 a\right\}$$
$$=a^2 f'(a)-2a\sin^2 a=2a\sin a(a\cos a-\sin a)$$