数学演習（三角･指数･対数関数の導関数）Ｒ１．６．２７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sin 2x$　(2) $y=\cos x^2$　(3) $y=\tan^2 x$

(4) $y=\sin^3(2x+1)$　(5) $y=\cos x\sin^2 x$　(6) $y=\tan(\sin x)$

(7) $y=\dfrac{\tan x}{x}$　(8) $y=\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$

2 次の関数を微分せよ。ただし，$a>0$，$a\fallingdotseq 1$ とする。

(1) $y=\log 3x$　(2) $y=\log_{10}(-4x)$　(3) $y=\log|x^2-1|$

(4) $y=(\log x)^3$　(5) $y=\log_2|\cos x|$　(6) $y=\log(\log x)$

(7) $y=\log\dfrac{2+\sin x}{2-\sin x}$　(8) $y=e^{6x}$　(9) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(10) $y=a^{-2x+1}$　(11) $y=e^x\cos x$

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y=x^{2x}$ $(x>0)$　(2) $y=x^{\log x}$　(3) $y=(x+2)^2(x+3)^3(x+4)^4$

(4) $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x^2+1)(x-1)}$　(5) $y=\sqrt[3]{x^2(x+1)}$　(6) $y=(x+2)\sqrt{\dfrac{(x+3)^3}{x^2+1}}$

4 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ (2) $y=\dfrac{\log x}{\log x+1}$ $(x>1)$ (3) $y=\log(\sin^2 x)$

(4) $y=\log\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ (5) $y=\dfrac{1}{\cos x+e^{-x}}$

数学演習（三角･指数･対数関数の導関数）Ｒ１．６．２７

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sin 2x$　(2) $y=\cos x^2$　(3) $y=\tan^2 x$

(4) $y=\sin^3(2x+1)$　(5) $y=\cos x\sin^2 x$　(6) $y=\tan(\sin x)$

(7) $y=\dfrac{\tan x}{x}$　(8) $y=\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$

解答　(1) $2\cos 2x$　(2) $-2x\sin x^2$　(3) $\dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}$　(4) $6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)$

(5) $-3\sin^3 x+2\sin x$　(6) $\dfrac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$　(7) $\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$

(8) $-\dfrac{2x\sin x+\cos x}{2x\sqrt{x}}$

解説

(1) $y'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x$

(2) $y'=-\sin x^2\cdot(x^2)'=-2x\sin x^2$

(3) $y'=2\tan x\cdot(\tan x)'=2\tan x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}$

(4) $y'=3\sin^2(2x+1)\cdot\{\sin(2x+1)\}'$
$=3\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)\cdot(2x+1)'$
$=6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)$

(5) $y'=(\cos x)'\sin^2 x+\cos x(\sin^2 x)'$
$=-\sin x\cdot\sin^2 x+\cos x\cdot 2\sin x\cos x=\sin x(-\sin^2 x+2\cos^2 x)$
$=\sin x(-3\sin^2 x+2)=-3\sin^3 x+2\sin x$

別解　$\sin^2 x=1-\cos^2 x$ から　$y=\cos x-\cos^3 x$

よって　$y'=-\sin x+3\sin x\cos^2 x=-3\sin^3 x+2\sin x$

(6) $y'=\dfrac{1}{\cos^2(\sin x)}\cdot\cos x=\dfrac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$

(7) $y'=\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot x-\tan x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$

(8) $y'=\dfrac{-\sin x\cdot\sqrt{x}-\cos x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\dfrac{2x\sin x+\cos x}{2x\sqrt{x}}$

2 次の関数を微分せよ。ただし，$a>0$，$a\fallingdotseq 1$ とする。

(1) $y=\log 3x$　(2) $y=\log_{10}(-4x)$　(3) $y=\log|x^2-1|$

(4) $y=(\log x)^3$　(5) $y=\log_2|\cos x|$　(6) $y=\log(\log x)$

(7) $y=\log\dfrac{2+\sin x}{2-\sin x}$　(8) $y=e^{6x}$　(9) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(10) $y=a^{-2x+1}$　(11) $y=e^x\cos x$

解答　(1) $\dfrac{1}{x}$　(2) $\dfrac{1}{x\log 10}$　(3) $\dfrac{2x}{x^2-1}$　(4) $\dfrac{3(\log x)^2}{x}$　(5) $-\dfrac{\tan x}{\log 2}$

(6) $\dfrac{1}{x\log x}$　(7) $\dfrac{4\cos x}{4-\sin^2 x}$　(8) $6e^{6x}$　(9) $\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

(10) $(-2\log a)a^{-2x+1}$　(11) $e^x(\cos x-\sin x)$

解説

(1) $y'=\dfrac{3}{3x}=\dfrac{1}{x}$　(2) $y'=\dfrac{-4}{-4x\log 10}=\dfrac{1}{x\log 10}$

(3) $y'=\dfrac{2x}{x^2-1}$　(4) $y'=3(\log x)^2\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{3(\log x)^2}{x}$

(5) $y'=\dfrac{-\sin x}{\cos x\log 2}=-\dfrac{\tan x}{\log 2}$　(6) $y'=\dfrac{(\log x)'}{\log x}=\dfrac{1}{x\log x}$

(7) $y=\log(2+\sin x)-\log(2-\sin x)$ であるから

$y'=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}-\dfrac{-\cos x}{2-\sin x}=\dfrac{4\cos x}{(2+\sin x)(2-\sin x)}=\dfrac{4\cos x}{4-\sin^2 x}$

別解　$y'=\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}\cdot\dfrac{\cos x(2-\sin x)-(2+\sin x)(-\cos x)}{(2-\sin x)^2}$

$=\dfrac{4\cos x}{(2+\sin x)(2-\sin x)}=\dfrac{4\cos x}{4-\sin^2 x}$

(8) $y'=e^{6x}\cdot 6=6e^{6x}$

(9) $y'=\dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\dfrac{4e^xe^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}=\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

別解　$y=1-\dfrac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$ であるから

$y'=-2\left\{-\dfrac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}\right\}=\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

(10) $y'=a^{-2x+1}\cdot(-2)\log a=(-2\log a)a^{-2x+1}$

(11) $y'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y=x^{2x}$ $(x>0)$　(2) $y=x^{\log x}$　(3) $y=(x+2)^2(x+3)^3(x+4)^4$

(4) $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x^2+1)(x-1)}$　(5) $y=\sqrt[3]{x^2(x+1)}$　(6) $y=(x+2)\sqrt{\dfrac{(x+3)^3}{x^2+1}}$

解答　(1) $2(\log x+1)x^{2x}$　(2) $2x^{\log x-1}\log x$

(3) $(x+2)(x+3)^2(x+4)^3(9x^2+52x+72)$　(4) $-\dfrac{4(x+1)^2(x^2-x+1)}{(x^2+1)^2(x-1)^2}$

(5) $\dfrac{3x+2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x(x+1)^2}}$　(6) $\dfrac{3x^3+2x^2-7x+12}{2}\sqrt{\dfrac{x+3}{(x^2+1)^3}}$

解説

(1) $x>0$ であるから　$y>0$

両辺の自然対数をとって　$\log y=2x\log x$

両辺を x で微分して　$\dfrac{y'}{y}=2(\log x+1)$

よって　$y'=2(\log x+1)x^{2x}$

(2) $x>0$ であるから　$y>0$

両辺の自然対数をとって　$\log y=(\log x)^2$

両辺を x で微分して　$\dfrac{y'}{y}=(2\log x)\cdot\dfrac{1}{x}$

よって　$y'=(2\log x)\cdot\dfrac{1}{x}\cdot x^{\log x}=2x^{\log x-1}\log x$

(3) 両辺の絶対値の自然対数をとって

$\log|y|=2\log|x+2|+3\log|x+3|+4\log|x+4|$

両辺を x で微分して　$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{4}{x+4}=\dfrac{9x^2+52x+72}{(x+2)(x+3)(x+4)}$

よって　$y'=\dfrac{9x^2+52x+72}{(x+2)(x+3)(x+4)}\cdot(x+2)^2(x+3)^3(x+4)^4$

$=(x+2)(x+3)^2(x+4)^3(9x^2+52x+72)$

(4) 両辺の絶対値の自然対数をとって

$\log|y|=3\log|x+1|-\log(x^2+1)-\log|x-1|$

両辺を x で微分して　$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{-4(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2+1)(x-1)}$

よって　$y'=\dfrac{-4(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2+1)(x-1)}\cdot\dfrac{(x+1)^3}{(x^2+1)(x-1)}$

$=-\dfrac{4(x+1)^2(x^2-x+1)}{(x^2+1)^2(x-1)^2}$

(5) 両辺の絶対値の自然対数をとって　$\log|y|=\dfrac{1}{3}(2\log|x|+\log|x+1|)$

両辺を x で微分して　$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x+1}\right)=\dfrac{3x+2}{3x(x+1)}$

よって　$y'=\dfrac{3x+2}{3x(x+1)}\sqrt[3]{x^2(x+1)}=\dfrac{3x+2}{3}\cdot\dfrac{x^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}{x(x+1)}$

$=\dfrac{3x+2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}(x+1)^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{3x+2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x(x+1)^2}}$

(6) 両辺の絶対値の自然対数をとって

$\log|y|=\log|x+2|+\dfrac{1}{2}\{3\log|x+3|-\log(x^2+1)\}$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x+3}-\frac{2x}{x^2+1}\right)=\frac{3x^3+2x^2-7x+12}{2(x+2)(x+3)(x^2+1)}$$

よって $y'=\dfrac{3x^3+2x^2-7x+12}{2(x+2)(x+3)(x^2+1)}\cdot(x+2)\sqrt{\dfrac{(x+3)^3}{x^2+1}}$

$$=\frac{3x^3+2x^2-7x+12}{2}\cdot\frac{(x+3)^{-1+\frac{3}{2}}}{(x^2+1)^{1+\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3x^3+2x^2-7x+12}{2}\sqrt{\frac{x+3}{(x^2+1)^3}}$$

4 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ (2) $y=\dfrac{\log x}{\log x+1}$ $(x>1)$ (3) $y=\log(\sin^2 x)$

(4) $y=\log\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ (5) $y=\dfrac{1}{\cos x+e^{-x}}$

解答 (1) $\dfrac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$ (2) $\dfrac{1}{x(\log x+1)^2}$ (3) $\dfrac{2\cos x}{\sin x}$ (4) $\dfrac{1}{\cos x}$

(5) $\dfrac{\sin x+e^{-x}}{(\cos x+e^{-x})^2}$

解説

(1) $y'=\dfrac{(\sin x)'(\sin x+\cos x)-\sin x(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}$

$$=\frac{\cos x(\sin x+\cos x)-\sin x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$$

(2) $y'=\dfrac{(\log x)'(\log x+1)-\log x(\log x+1)'}{(\log x+1)^2}$

$$=\frac{\frac{1}{x}(\log x+1)-(\log x)\cdot\frac{1}{x}}{(\log x+1)^2}=\frac{1}{x(\log x+1)^2}$$

(3) $y'=\dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cos x=\dfrac{2\cos x}{\sin x}$

(4) $y'=(\log|\cos x|-\log|1-\sin x|)'=\dfrac{-\sin x}{\cos x}-\dfrac{-\cos x}{1-\sin x}$

$$=\frac{-\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}=\frac{-\sin x}{\cos x}+\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}$$

(5) $y'=-\dfrac{(\cos x+e^{-x})'}{(\cos x+e^{-x})^2}=-\dfrac{-\sin x-e^{-x}}{(\cos x+e^{-x})^2}=\dfrac{\sin x+e^{-x}}{(\cos x+e^{-x})^2}$