

1

次の関数を微分せよ。

(1)

$y=3x^5-2x^4+4x^2-2$

(3)

$y=(x^3+3x)(x^2-2)$

(5)

$y=\frac{1}{x^2+x+1}$

(7)

$y=\frac{x^3-3x^2+x}{x^2}$

(2)

$y=(x^2+2x)(x^2-x+1)$

(4)

$y=(x+3)(x^2-1)(-x+2)$

(6)

$y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

(8)

$y=\frac{(x-1)(x^2+2)}{x^2+3}$

2

次の関数を微分せよ。

(1)

$y=(x-3)^3$

(4)

$y=\frac{1}{(x^2-2)^3}$

(2)

$y=(x^2-2)^2$

(5)

$y=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$

(3)

$y=(x^2+1)^2(x-3)^3$

(6)

$y=\frac{(2x-1)^3}{(x^2+1)^2}$

3

(1)

$y=\frac{1}{x^3}$ の逆関数の導関数を求めよ。

(2)

$f(x)=\frac{1}{x^3+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の $x=\frac{1}{65}$ における微分係数を求めよ。

(3)

次の関数を微分せよ。

(ア)

$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

(イ)

$y=\sqrt{2-x^3}$

(ウ)

$y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$

[1] 次の関数を微分せよ。

- (1) $y=3x^5-2x^4+4x^2-2$
- (2) $y=(x^2+2x)(x^2-x+1)$
- (3) $y=(x^3+3x)(x^2-2)$
- (4) $y=(x+3)(x^2-1)(-x+2)$
- (5) $y=\frac{1}{x^2+x+1}$
- (6) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$
- (7) $y=\frac{x^3-3x^2+x}{x^2}$
- (8) $y=\frac{(x-1)(x^2+2)}{x^2+3}$

[解答] (1) $15x^4-8x^3+8x$ (2) $4x^3+3x^2-2x+2$ (3) $5x^4+3x^2-6$
(4) $-4x^3-3x^2+14x+1$ (5) $-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ (6) $-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$
(7) $\frac{x^2-1}{x^2}$ (8) $\frac{x^4+7x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}$

[解説]

- (1) $y'=3\cdot 5x^4-2\cdot 4x^3+4\cdot 2x=15x^4-8x^3+8x$
- (2) $y'=(2x+2)(x^2-x+1)+(x^2+2x)(2x-1)=2(x^3+1)+2x^3+3x^2-2x=4x^3+3x^2-2x+2$
- (3) $y'=(3x^2+3)(x^2-2)+(x^3+3x)\cdot 2x=(3x^4-3x^2-6)+(2x^4+6x^2)=5x^4+3x^2-6$
- (4) $y'=1\cdot (x^2-1)(-x+2)+(x+3)\cdot 2x(-x+2)+(x+3)(x^2-1)(-1)=(-x^3+2x^2+x-2)+(-2x^3-2x^2+12x)+(-x^3-3x^2+x+3)=-4x^3-3x^2+14x+1$
- (5) $y'=-\frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}=-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$
- (6) $y'=\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$

[別解] $y=-1+\frac{2}{1+x^2}$ であるから $y'=0-\frac{2\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$

- (7) $y'=\left(x-3+\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$

[別解] $y'=\frac{(3x^2-6x+1)x^2-(x^3-3x^2+x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{(3x^4-6x^3+x^2)-(2x^4-6x^3+2x^2)}{x^4}=\frac{x^4-x^2}{x^4}=\frac{x^2-1}{x^2}$

- (8) $y'=\frac{\{(x-1)(x^2+2)\}'(x^2+3)-(x-1)(x^2+2)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=\frac{\{1\cdot (x^2+2)+(x-1)\cdot 2x\}(x^2+3)-(x-1)(x^2+2)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{(3x^4-2x^3+11x^2-6x+6)-(2x^4-2x^3+4x^2-4x)}{(x^2+3)^2}=\frac{x^4+7x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}$

[別解] $y=(x-1)\cdot \frac{x^2+3-1}{x^2+3}=(x-1)\left(1-\frac{1}{x^2+3}\right)$ であるから

$$y'=1\cdot \left(1-\frac{1}{x^2+3}\right)+(x-1)\cdot \frac{2x}{(x^2+3)^2}=\frac{(x^2+3)^2-(x^2+3)+2x(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{x^4+7x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}$$

[2] 次の関数を微分せよ。

- (1) $y=(x-3)^3$
- (2) $y=(x^2-2)^2$
- (3) $y=(x^2+1)^2(x-3)^3$
- (4) $y=\frac{1}{(x^2-2)^3}$
- (5) $y=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$
- (6) $y=\frac{(2x-1)^3}{(x^2+1)^2}$

[解答] (1) $3(x-3)^2$ (2) $4x(x^2-2)$ (3) $(x^2+1)(x-3)^2(7x^2-12x+3)$
(4) $-\frac{6x}{(x^2-2)^4}$ (5) $\frac{6(x-2)}{(x+1)^3}$ (6) $-\frac{2(x+1)(x-3)(2x-1)^2}{(x^2+1)^3}$

[解説]

- (1) $y'=3(x-3)^2(x-3)'=3(x-3)^2\cdot 1=3(x-3)^2$
- (2) $y'=2(x^2-2)(x^2-2)'=2(x^2-2)\cdot 2x=4x(x^2-2)$
- (3) $y'=\{(x^2+1)^2\}'(x-3)^3+(x^2+1)^2\{(x-3)^3\}'=2(x^2+1)\cdot 2x(x-3)^3+(x^2+1)^2\cdot 3(x-3)^2\cdot 1=(x^2+1)(x-3)^2\{4x(x-3)+3(x^2+1)\}=(x^2+1)(x-3)^2(7x^2-12x+3)$
- (4) $y=(x^2-2)^{-3}$ であるから

$$y'=-3(x^2-2)^{-4}(x^2-2)'=-\frac{3}{(x^2-2)^4}\cdot 2x=-\frac{6x}{(x^2-2)^4}$$

[別解] $y'=-\frac{\{(x^2-2)^3\}'}{\{(x^2-2)^3\}^2}=-\frac{3(x^2-2)^2\cdot 2x}{(x^2-2)^6}=-\frac{6x}{(x^2-2)^4}$

- (5) $y'=2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\left(\frac{x-2}{x+1}\right)'=2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\cdot \frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2}=\frac{2(x-2)\cdot 3}{(x+1)^3}=\frac{6(x-2)}{(x+1)^3}$

[別解] $y'=\left\{\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2\right\}'=\frac{2(x-2)(x+1)^2-(x-2)^2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=2\cdot \frac{(x-2)(x+1-x+2)}{(x+1)^3}=\frac{6(x-2)}{(x+1)^3}$

- (6) $y'=\frac{\{(2x-1)^3\}'(x^2+1)^2-(2x-1)^3\{(x^2+1)^2\}'}{(x^2+1)^4}=\frac{3(2x-1)^2\cdot 2(x^2+1)^2-(2x-1)^3\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2(2x-1)^2\{3(x^2+1)-(2x-1)\cdot 2x\}}{(x^2+1)^3}=-\frac{2(x+1)(x-3)(2x-1)^2}{(x^2+1)^3}$

[3] (1) $y=\frac{1}{x^3}$ の逆関数の導関数を求めよ。

- (2) $f(x)=\frac{1}{x^3+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の $x=\frac{1}{65}$ における微分係数を求めよ。

(3) 次の関数を微分せよ。

- (ア) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
- (イ) $y=\sqrt{2-x^3}$
- (ウ) $y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$

[解答] (1) $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$ (2) $-\frac{4225}{48}$

[解説]

- (1) $y=\frac{1}{x^3}$ の逆関数は $x=\frac{1}{y^3}$ を満たす。

$$\text{よって} \quad \frac{dx}{dy}=-\frac{3}{y^4}$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{y^4}{3}=-\frac{1}{3}(y^3)^{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{3}(x^{-1})^{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

- (2) $y=f^{-1}(x)$ とすると $x=f(y)=\frac{1}{y^3+1}$

$$\text{よって} \quad \frac{dx}{dy}=-\frac{(y^3+1)'}{(y^3+1)^2}=-\frac{3y^2}{(y^3+1)^2}$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{(y^3+1)^2}{3y^2}$$

$$x=\frac{1}{65} \text{ のとき} \quad \frac{1}{y^3+1}=\frac{1}{65} \quad \text{ゆえに} \quad y^3=64 \quad \text{したがって} \quad y=4$$

$$\text{このとき} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{(4^3+1)^2}{3\cdot 4^2}=-\frac{4225}{48}$$

- (3) (ア) $y'=\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

$$(イ) \quad y'=\left\{(2-x^3)^{\frac{1}{2}}\right\}'=\frac{1}{2}(2-x^3)^{-\frac{1}{2}}\cdot (2-x^3)'=-\frac{3x^2}{2\sqrt{2-x^3}}$$

$$(ウ) \quad y'=\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}'=\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{1}{3}\cdot \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}}$$