数学演習（微分係数と導関数）R１．６．２５　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の関数は，[　]で示された点において連続であるか，微分可能であるかを調べよ。

(1) $f(x)=|x-a|$　(a は実数の定数)　[$x=a$]

(2) $f(x)=\begin{cases}\sin x & (x\geqq 0)\\ x^2+x & (x<0)\end{cases}$　[$x=0$]

$\boxed{2}$ 次の関数を，導関数の定義に従って微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$　　(2) $y=\sqrt{4x+3}$　　(3) $y=\sqrt[4]{x}$

$\boxed{3}$ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-2}+3 & (x\geqq 2)\\ ax^2+bx & (x<2)\end{cases}$ で定義される関数 $f(x)$ が $x=2$ で微分可能となるように，定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{4}$ (1)　関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であることの定義を述べよ。

(2)　関数 $f(x)=|x^2-1|\cdot 3^{-x}$ は $x=1$ で微分可能でないことを示せ。

$\boxed{5}$ a を実数とする。すべての実数 x で定義された関数 $f(x)=|x|(e^{2x}+a)$ は $x=0$ で微分可能であるとする。

(1)　a および $f'(0)$ の値を求めよ。

(2)　右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}$ を求めよ。更に，$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ。

$\boxed{6}$ $-1<x<1$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ で，次の 2 つの条件を満たすものを考える。

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\quad(-1<x<1,\ -1<y<1)$$

$f(x)$ は $x=0$ で微分可能で，そこでの微分係数は 1 である

(1)　$-1<x<1$ に対し $f(x)=-f(-x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$f(x)$ は $-1<x<1$ の範囲で微分可能であることを示し，導関数 $f'(x)$ を求めよ。

$\boxed{1}$ 次の関数は，[ ]で示された点において連続であるか，微分可能であるかを調べよ。

(1) $f(x)=|x-a|$ （a は実数の定数） $[x=a]$

(2) $f(x)=\begin{cases}\sin x & (x\geqq 0)\\ x^2+x & (x<0)\end{cases}$ $[x=0]$

解答 (1) $x=a$ で連続であるが微分可能ではない

(2) $x=0$ で連続であり微分可能である

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a+0}(x-a)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to a-0}f(x)=\lim_{x\to a-0}\{-(x-a)\}=0$

ゆえに $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$

また，$f(a)=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

よって，$f(x)$ は $x=a$ で連続である。

次に $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h-0}{h}=1$

また $\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h-0}{h}=-1$

$h\longrightarrow+0$ と $h\longrightarrow-0$ のときの極限値が異なるから，$f'(a)$ は存在しない。

すなわち，$f(x)$ は $x=a$ で微分可能ではない。

(2) $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\sin h-0}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\sin h}{h}=1$

$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{(h^2+h)-0}{h}=\lim_{h\to-0}(h+1)=1$

$h\longrightarrow+0$ と $h\longrightarrow-0$ のときの極限値が一致し，$f'(0)=1$ となるから，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能である。

したがって，$f(x)$ は $x=0$ で連続である。

$\boxed{2}$ 次の関数を，導関数の定義に従って微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$　　(2) $y=\sqrt{4x+3}$　　(3) $y=\sqrt[4]{x}$

解答 (1) $-\dfrac{2}{x^3}$　(2) $\dfrac{2}{\sqrt{4x+3}}$　(3) $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

解説

(1) $\displaystyle y'=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}\right\}=\lim_{h\to0}\frac{x^2-(x+h)^2}{h(x+h)^2x^2}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{-h(2x+h)}{h(x+h)^2x^2}=\lim_{h\to0}\frac{-(2x+h)}{(x+h)^2x^2}=\frac{-2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}$

(2) $\displaystyle y'=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{4(x+h)+3}-\sqrt{4x+3}}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{\{4(x+h)+3\}-(4x+3)}{h\{\sqrt{4(x+h)+3}+\sqrt{4x+3}\}}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{4}{\sqrt{4(x+h)+3}+\sqrt{4x+3}}=\frac{2}{\sqrt{4x+3}}$

(3) $\displaystyle y'=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt[4]{x+h}-\sqrt[4]{x}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h(\sqrt[4]{x+h}+\sqrt[4]{x})}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt[4]{x+h}+\sqrt[4]{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{1}{(\sqrt[4]{x+h}+\sqrt[4]{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt[4]{x}\cdot2\sqrt{x}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

$\boxed{3}$ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-2}+3 & (x\geqq2)\\ ax^2+bx & (x<2)\end{cases}$ で定義される関数 $f(x)$ が $x=2$ で微分可能となるように，定数 a，b の値を定めよ。

解答 $a=\dfrac{\sqrt{2}-3}{4}$，$b=3$

解説

関数 $f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるとき，$f(x)$ は $x=2$ で連続であるから

$\displaystyle\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$　すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to2-0}f(x)=\lim_{x\to2+0}f(x)=f(2)$

よって　$a\cdot2^2+b\cdot2=\sqrt{2^2-2}+3$

ゆえに　$4a+2b=\sqrt{2}+3$　……①

したがって，① から

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\sqrt{(2+h)^2-2}+3-(\sqrt{2}+3)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to+0}\frac{\sqrt{h^2+4h+2}-\sqrt{2}}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{(h^2+4h+2)-2}{h(\sqrt{h^2+4h+2}+\sqrt{2})}$

$\displaystyle=\lim_{h\to+0}\frac{h+4}{\sqrt{h^2+4h+2}+\sqrt{2}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{a(2+h)^2+b(2+h)-(\sqrt{2}+3)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to-0}\frac{4a+4ah+ah^2+2b+bh-\sqrt{2}-3}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to-0}\frac{4ah+ah^2+bh}{h}=\lim_{h\to-0}(4a+b+ah)=4a+b$

よって，$f'(2)$ が存在するための条件は　$4a+b=\sqrt{2}$　……②

①－② から　$b=3$　　ゆえに，② から　$a=\dfrac{\sqrt{2}-3}{4}$

$\boxed{4}$ (1) 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であることの定義を述べよ。

(2) 関数 $f(x)=|x^2-1|\cdot3^{-x}$ は $x=1$ で微分可能でないことを示せ。

解答 (1) 微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\left[\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]$ が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるという

(2) 略

解説

(1) 微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\left[\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]$ が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるという。

(2) $f(x)=\begin{cases}(x^2-1)\cdot3^{-x} & (x\leqq-1,\ 1\leqq x)\\ -(x^2-1)\cdot3^{-x} & (-1<x<1)\end{cases}$ であるから

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{(h^2+2h)\cdot3^{-(1+h)}-0}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to+0}(h+2)\cdot3^{-1-h}=\frac{2}{3}$

$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-(h^2+2h)\cdot3^{-(1+h)}-0}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to-0}\{-(h+2)\cdot3^{-1-h}\}=-\frac{2}{3}$

$h\longrightarrow+0$ と $h\longrightarrow-0$ のときの極限値が異なるから，$f'(1)$ は存在しない。

すなわち，$f(x)$ は $x=1$ で微分可能でない。

別解 $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{(x^2-1)\cdot3^{-x}-0}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1+0}(x+1)\cdot3^{-x}=\frac{2}{3}$

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{-(x^2-1)\cdot3^{-x}-0}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1-0}\{-(x+1)\cdot3^{-x}\}=-\frac{2}{3}$

$x\longrightarrow1+0$ と $x\longrightarrow1-0$ のときの極限値が異なるから，$f'(1)$ は存在しない。

すなわち，$f(x)$ は $x=1$ で微分可能でない。

$\boxed{5}$ a を実数とする。すべての実数 x で定義された関数 $f(x)=|x|(e^{2x}+a)$ は $x=0$ で微分可能であるとする。

(1) a および $f'(0)$ の値を求めよ。

(2) 右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}$ を求めよ。更に，$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ。

解答 (1) $a=-1$，$f'(0)=0$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}=4$，証明略

解説

(1) $f(0)=|0|(e^0+a)=0$ である。

$x>0$ のとき，$f(x)=x(e^{2x}+a)$ であるから

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h(e^{2h}+a)}{h}=\lim_{h\to+0}(e^{2h}+a)=1+a$

$x<0$ のとき，$f(x)=-x(e^{2x}+a)$ であるから

$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h(e^{2h}+a)}{h}=\lim_{h\to-0}\{-(e^{2h}+a)\}=-(1+a)$

$f(x)$ は $x=0$ で微分可能であるから，$f'(0)$ が存在し

$\displaystyle f'(0)=\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

よって　$1+a=-(1+a)$　　これを解いて　$a=-1$

このとき　$f'(0)=0$

(2) $x>0$ のとき，$f(x)=x(e^{2x}-1)$ であり

$f'(x)=1\cdot(e^{2x}-1)+x\cdot2e^{2x}=(2x+1)e^{2x}-1$

よって　$\displaystyle\frac{f'(x)}{x}=\frac{(2x+1)e^{2x}-1}{x}=2e^{2x}+2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to+0}\left(2e^{2x}+2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)=2\cdot1+2\cdot1=4$

よって　$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{f'(h)}{h}=4$

また，$x<0$ のとき，$f(x)=-x(e^{2x}-1)$ であり

$\displaystyle\frac{f'(x)}{x}=\frac{-(2x+1)e^{2x}+1}{x}=-2e^{2x}-2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to-0}\left(-2e^{2x}-2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)=-2\cdot1-2\cdot1=-4$

よって　$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f'(h)}{h}=-4$

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}\neq\lim_{h\to-0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}$ であるから，$f''(0)$ は存在しない。

つまり，$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

$\boxed{6}$ $-1<x<1$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ で，次の2つの条件を満たすものを考える。

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\quad(-1<x<1,\ -1<y<1)$$

$f(x)$ は $x=0$ で微分可能で，そこでの微分係数は1である

(1)　$-1<x<1$ に対し $f(x)=-f(-x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$f(x)$ は $-1<x<1$ の範囲で微分可能であることを示し，導関数 $f'(x)$ を求めよ。

解答　(1)　略　　(2)　証明略，$f'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

解説

$f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$　……①　とする。

(1)　$-1<x<1$ のとき　$-1<-x<1$

①において，$y=-x$ とすると　$f(x)+f(-x)=f\left(\dfrac{x-x}{1-x^2}\right)$

よって　$f(x)+f(-x)=f(0)$　……②

また，①において，$x=y=0$ とすると　$f(0)+f(0)=f(0)$

よって　$f(0)=0$　……③

②，③から　$f(x)+f(-x)=0$　　したがって　$f(x)=-f(-x)$

(2)　$f'(0)=1$ から　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=1$　　③から　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$　……④

よって，$-1<x<1$ で h が十分に小さいとき

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(-x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\dfrac{x+h-x}{1+(x+h)(-x)}\right)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\dfrac{h}{1-x^2-hx}\right)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\dfrac{h}{1-x^2-hx}\right)}{\dfrac{h}{1-x^2-hx}}\cdot\frac{1}{1-x^2-hx}\end{aligned}$$

$h\to0$ のとき，$\dfrac{h}{1-x^2-hx}\to0$ であるから，④より　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f\left(\dfrac{h}{1-x^2-hx}\right)}{\dfrac{h}{1-x^2-hx}}=1$

よって　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1\cdot\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{1-x^2}$

したがって，$f(x)$ は $-1<x<1$ の範囲で微分可能で　$f'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$