高校３年　第１回定期考査　数学（微分法）2015.5.22　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ を，導関数の定義に従って微分せよ。

$\boxed{2}$ 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(x^4-2)(x^3+x)$

(2)　$y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

(3)　$y=x^3(2x-1)^2$

(4)　$y=\sqrt[4]{(1-2x)^3}$

(5)　$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(6)　$y=\tan(4x-3)$

(7)　$y=\cos(\sin x)$

(8)　$y=\log(x^2+3)$

(9)　$y=\log_{10}|3x+4|$

(10)　$y=e^{-2x^2}$

(11)　$y=3^{4x}$

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の $x=\dfrac{1}{9}$ における微分係数を求めよ。

4 次の関数を微分せよ。a，b は定数で，$a>0$，$a\fallingdotseq 1$ とする。

(1) $y=e^{-ax}\sin bx$

(2) $y=\dfrac{e^x}{\sin x}$

(3) $y=x^3\log x$

(4) $y=\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$

(5) $y=\left(\tan x+\dfrac{1}{\tan x}\right)^2$

(6) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$

(7) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2-a^2})$

5 対数微分法により，次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$

(2) $y=(\sqrt{x})^x \quad (x>0)$

(3) $y=x^{\log x}$

高校３年　第１回定期考査　数学（微分法）2015.5.22　　（　）組（　）番　名前（ ニたニ ）

1 関数 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ を，導関数の定義に従って微分せよ。

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

通分

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}}$$

有理化

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\times\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+h})(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\times\frac{x-(x+h)}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-1}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x+0}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+0})}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}\cdot2\sqrt{x}}$$

$$=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

5

2 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(x^4-2)(x^3+x)$

$$y'=(x^4-2)'(x^3+x)+(x^4-2)(x^3+x)'$$

$$=4x^3(x^3+x)+(x^4-2)(3x^2+1)$$

$$=4x^6+4x^4+3x^6+x^4-6x^2-2$$

$$=7x^6+5x^4-6x^2-2$$

4

(2) $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$

$$y'=\frac{(x^2-3x+3)'(x-1)-(x^2-3x+3)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x+3)\cdot1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-2x-3x+3-x^2+3x-3}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

4

(3) $y=x^3(2x-1)^2$

$$y'=(x^3)'(2x-1)^2+x^3\{(2x-1)^2\}'$$

$$=3x^2(2x-1)^2+x^3\cdot2(2x-1)(2x-1)'$$ ← 合成関数

$$=3x^2(2x-1)^2+x^3\cdot2(2x-1)\cdot2$$

$$=x^2(2x-1)\{3(2x-1)+x\cdot2\cdot2\}=x^2(2x-1)(10x-3)$$

4

(4) $y=\sqrt[4]{(1-2x)^3}$

$$\left(\begin{array}{l}y=\sqrt[4]{u^3}=u^{\frac{3}{4}}\to\frac{3}{4}u^{-\frac{1}{4}}\\ u=1-2x\to-2\end{array}\right)$$

$$y'=\frac{3}{4}u^{-\frac{1}{4}}\times(1-2x)'$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{u}}\times(-2)$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt[4]{1-2x}}\times(-2)$$

$$=-\frac{3}{2\sqrt[4]{1-2x}}$$

4

(5) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$

$$\left(\begin{array}{l}\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}\to\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\\ x^2+x+1\to2x+1\end{array}\right)$$

$$y'=\frac{(x)'\sqrt{x^2+x+1}-x\cdot(\sqrt{x^2+x+1})'}{(\sqrt{x^2+x+1})^2}$$

$$=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+x+1}-x\cdot\frac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+x+1)'}{(\sqrt{x^2+x+1})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot(2x+1)}{(\sqrt{x^2+x+1})^2}$$

分子・分母に $2\sqrt{x^2+x+1}$

$$=\frac{2(\sqrt{x^2+x+1})^2-x(2x+1)}{2(\sqrt{x^2+x+1})^3}$$

$$=\frac{x+2}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

4

(6) $y=\tan(4x-3)$

$$\left(\begin{array}{l}\tan u\to\frac{1}{\cos^2u}\\ 4x-3\to4\end{array}\right)$$

$$y'=\frac{1}{\cos^2u}\times4$$

$$=\frac{4}{\cos^2(4x-3)}$$

4

(7) $y=\cos(\sin x)$

$$\left(\begin{array}{l}\cos u\to-\sin u\\ \sin x\to\cos x\end{array}\right)$$

$$y'=-\sin u\times\cos x$$

$$=-\sin(\sin x)\times\cos x=-\cos x\sin(\sin x)$$

4

(8) $y=\log(x^2+3)$

$$\left(\begin{array}{l}\log u\to\frac{1}{u}\\ x^2+3\to2x\end{array}\right)$$

$$y'=\frac{1}{u}\times2x=\frac{2x}{x^2+3}$$

4

(9) $y=\log_{10}|3x+4|$

$$\left(\begin{array}{l}\log_{10}|u|\to\frac{1}{u\log10}\\ 3x+4\to3\end{array}\right)$$

$$y'=\frac{1}{u\log10}\times3$$

$$=\frac{3}{(3x+4)\log10}$$

4

(10) $y=e^{-2x^2}$

$$\left(\begin{array}{l}e^u\to e^u\\ -2x^2\to-4x\end{array}\right)$$

$$y'=e^u\times(-4x)$$

$$=e^{-2x^2}\times(-4x)$$

$$=-4xe^{-2x^2}$$

4

(11) $y=3^{4x}$

$$\left(\begin{array}{l}3^u\to3^u\log3\\ 4x\to4\end{array}\right)$$

$$y'=3^u\log3\times4$$

$$=4\times3^{4x}\log3$$

4

3 $f(x)=\frac{1}{x^3+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の $x=\frac{1}{9}$ における微分係数を求めよ。

5

$y=\frac{1}{x^3+1}$ について，x と y を入れ替えて

$x=\frac{1}{y^3+1}$ …(*) となる。このyが $f^{-1}(x)$ であるので．

$f^{-1}\left(\frac{1}{9}\right)$ とは，(*)における $x=\frac{1}{9}$ のときの y' の値のこと．

ここで(*)において $x=\frac{1}{9}$ のとき，$\frac{1}{9}=\frac{1}{y^3+1}$　∴ $y^3=8$　$y=2$

また，(*)より $\frac{1}{x}=y^3+1$ として，この式の両辺をxで微分して

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{d}{dx}(y^3+1)$ より $-\frac{1}{x^2}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}(y^3+1)$

つまり $-\frac{1}{x^2}=y'\times3y^2$ より この式に $x=\frac{1}{9}$，$y=2$ を代入して

$-\frac{1}{\left(\frac{1}{9}\right)^2}=y'\times3\times2^2$　∴ $-81=y'\times12$　∴ $y'=-\frac{81}{12}=-\frac{27}{4}$

4 次の関数を微分せよ。a，b は定数で，$a>0$，$a \fallingdotseq 1$ とする。

(1) $y=e^{-ax}\sin bx$

$$y'=(e^{-ax})'\sin bx+e^{-ax}(\sin bx)'$$
$$=e^{-ax}(-ax)'\sin bx+e^{-ax}\cos bx\cdot(bx)'$$
$$=e^{-ax}(-a)\sin bx+e^{-ax}\cos bx\cdot b$$
$$=e^{-ax}(-a\sin bx+b\cos bx)$$

4

(2) $y=\dfrac{e^x}{\sin x}$

$$y'=\frac{(e^x)'\sin x-e^x(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$
$$=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$$

4

(3) $y=x^3\log x$

$$y'=(x^3)'\log x+x^3(\log x)'$$
$$=3x^2\cdot\log x+x^3\cdot\frac{1}{x}$$
$$=3x^2\log x+x^2$$
$$=x^2(3\log x+1)$$

4

(4) $y=\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$

$$y'=\frac{(1-\sin x)'(1+\cos x)-(1-\sin x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{(-\cos x)(1+\cos x)-(1-\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{-\cos x-\cos^2 x+\sin x-\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}=\frac{\sin x-\cos x-1}{(1+\cos x)^2}$$

4

(5) $y=\left(\tan x+\dfrac{1}{\tan x}\right)^2$

$$=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\sin x}\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{\sin x\cos x}\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x}\right)^2=\frac{4}{\sin^2 2x}$$

$$y'=4\times\left\{-\frac{(\sin^2 2x)'}{(\sin^2 2x)^2}\right\}$$
$$=-4\times\frac{2\sin 2x\cdot(\sin 2x)'}{\sin^4 2x}$$
$$=-4\times\frac{2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot(2x)'}{\sin^4 2x}$$
$$=-4\times\frac{2\times\cos 2x\times 2}{\sin^3 2x}$$
$$=-\frac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$$

5

(6) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$

$$y'=\frac{(\sqrt{1-x^2})'(1+x^2)-\sqrt{1-x^2}(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x^2)'(1+x^2)-\sqrt{1-x^2}\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\cdot(1+x^2)-\sqrt{1-x^2}\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{-\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-x^2}\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

分子分母に $\sqrt{1-x^2}$ かける

$$=\frac{-x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x-x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{x(x^2-3)}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$$

5

(7) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2-a^2})$

$$y'=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-a^2})\log a}\times(x+\sqrt{x^2-a^2})'$$
$$=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-a^2})\log a}\times\left\{1+\frac{1}{2}(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2-a^2)'\right\}$$
$$=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-a^2})\log a}\times\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot 2x\right)$$
$$=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-a^2})\log a}\times\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)$$

5

$$=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-a^2})\log a}\times\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}\log a}$$

5 対数微分法により，次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$

両辺の絶対値の自然対数をとって

$$\log|y|=\log\left|\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}\right|$$
$$=\frac{1}{3}\log|x+1||x-2|^2$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\log|x+1|+\log|x-2|^2\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\log|x+1|+2\log|x-2|\right\}$$

両辺 x で微分して

$$y'\times\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)'+2\cdot\frac{1}{x-2}\cdot(x-2)'\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{x-2+2(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{x-2+2x+2}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\frac{3x}{3(x+1)(x-2)}$$
$$=\frac{x}{(x+1)(x-2)}$$

よって

$$y'=\frac{x\times y}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\frac{x\cdot\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\frac{x\cdot(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x+1)(x-2)}$$
$$=x\cdot(x+1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}$$

5

(2) $y=(\sqrt{x})^x$ $(x>0)$

両辺の自然対数をとって

$$\log y=\log(\sqrt{x})^x$$
$$=x\log\sqrt{x}$$
$$=x\log x^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}x\log x$$

両辺 x で微分して

$$y'\times\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left\{(x)'\log x+x(\log x)'\right\}$$
$$y'\times\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left(\log x+x\cdot\frac{1}{x}\right)$$
$$y'=y\times\frac{1}{2}(\log x+1)$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{x})^x(\log x+1)$$

5

(3) $y=x^{\log x}$

両辺の自然対数をとって

$$\log y=\log x^{\log x}$$
$$=(\log x)\log x$$
$$=(\log x)^2$$

両辺 x で微分して

$$y'\times\frac{1}{y}=2\log x\,(\log x)'$$
$$=2\log x\cdot\frac{1}{x}$$

よって

$$y'=y\times\frac{2\log x}{x}$$
$$=x^{\log x}\times\frac{2\log x}{x}$$
$$=2\log x\cdot x^{\log x}\cdot x^{-1}$$
$$=2x^{\log x-1}\cdot\log x$$

5