

1 次の関数を微分せよ。 $y=(3x^2-x+1)^3$

2 次の関数を微分せよ。 $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

3 次の関数を微分せよ。 $y=\frac{x}{(2x-3)^2}$

4 次の関数を微分せよ。 $y=\tan x - x$

5 次の関数を微分せよ。 $y=\sin^2 x - \sin x^2$

6 次の関数を微分せよ。 $y=\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)^2$

9 次の関数を微分せよ。 $y=xe^{-x}$

7 次の関数を微分せよ。 $y=\cos^2 4x$

8 次の関数を微分せよ。 $y=\sin^4 x \cos 4x$

10 次の関数を微分せよ。 $y=2^{-x^2}$

13 次の関数を微分せよ。 $y=\log(x+\sqrt{x^2+4})$

14 次の関数を微分せよ。 $y=x^x \quad (x>0)$

11 次の関数を微分せよ。 $y=\frac{\log x}{\sqrt{x}}$

12 次の関数を微分せよ。 $y=\log_{10}|3x-2|$

[1] 次の関数を微分せよ。 $y = (3x^2 - x + 1)^3$

$$\begin{aligned} y' &= 3(3x^2 - x + 1)^{3-1} \times (3x^2 - x + 1)' \\ &= 3(3x^2 - x + 1)^2 \times (6x - 1) \\ &= 3(6x - 1)(3x^2 - x + 1)^2 \end{aligned}$$

[2] 次の関数を微分せよ。 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = (x^2 + 3)^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{2}(x^2 + 3)^{-\frac{1}{2}-1} \times (x^2 + 3)' \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + 3)^{-\frac{3}{2}} \times 2x \\ &= -x \cdot (x^2 + 3)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 3)^2}} \\ &\quad \left(-\frac{x}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}} \right) \end{aligned}$$

[3] 次の関数を微分せよ。 $y = \frac{x}{(2x-3)^2}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x)'(2x-3)^2 - x \cdot 3(2x-3)^{2-1}}{(2x-3)^4} \\ &= \frac{1 \cdot (2x-3)^2 - x \cdot 2(2x-3) \times (2x-3)^{2-1}}{(2x-3)^4} \\ &= \frac{(2x-3)^2 - x \cdot 2(2x-3) \cdot 2}{(2x-3)^4} \end{aligned}$$

$$= \frac{(2x-3)' - x \cdot 2 \cdot 2}{(2x-3)^3} = -\frac{2x+3}{(2x-3)^3}$$

[4] 次の関数を微分せよ。 $y = \tan x - x$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \\ &= \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \tan^2 x \end{aligned}$$

[5] 次の関数を微分せよ。 $y = \sin^2 x - \sin x^2$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \sin x (\sin x)' - \cos x^2 \times (x^2)' \\ &= 2 \sin x \cos x - \cos x^2 \times 2x \\ &= \frac{\sin 2x - 2x \cos x^2}{4} \end{aligned}$$

[6] 次の関数を微分せよ。 $y = \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)^2$

$$\begin{aligned} y' &= 2\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) \times \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)' \\ &= 2\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) \times \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) \\ &= 2\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) \times \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= 2 \cdot \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \times \frac{-\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= -\frac{2 \cos 2x}{\sin^3 x \cos^3 x} \\ &= -\frac{2 \cos 2x}{\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^3} = -\frac{16 \cos 2x}{\sin^3 2x} \end{aligned}$$

[7] 次の関数を微分せよ。 $y = \cos^2 4x$

$$\begin{aligned} y' &= 2 \cos 4x \times (\cos 4x)' \\ &= 2 \cos 4x \times (-\sin 4x) \times (4x)' \\ &= 2 \cos 4x \times (-\sin 4x) \times 4 \\ &= -8 \sin 4x \cos 4x \\ &= -4 \sin 8x \end{aligned}$$

[8] 次の関数を微分せよ。 $y = \sin^4 x \cos 4x$

$$\begin{aligned} y' &= (\sin 4x)' \cos 4x + \sin^4 x (\cos 4x)' \\ &= 4 \sin^3 x \cdot (\sin x)' \cos 4x + \sin^4 x \cdot (-\sin 4x) \times (8x)' \\ &= 4 \sin^3 x \cdot \cos x \cdot \cos 4x - \sin^4 x \cdot \sin 4x \cdot 4 \\ &= 4 \sin^3 x (\cos x \cdot \cos 4x - \sin x \cdot \sin 4x) \\ &= 4 \sin^3 x \cdot \cos (x + 4x) \\ &= 4 \sin^3 x \cos 5x \end{aligned}$$

[9] 次の関数を微分せよ。 $y = xe^{-x}$

$$\begin{aligned} y' &= (x)' e^{-x} + x \cdot (e^{-x})' \\ &= 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-x)' \\ &= e^{-x} - x e^{-x} \\ &= (1-x) e^{-x} \end{aligned}$$

10 次の関数を微分せよ。 $y = 2^{-x^2}$

$$\begin{aligned} y &= 2^{-x^2} (\log 2 \times (-x^2))' \\ &= 2^{-x^2} (\log 2 \times (-2x)) \\ &= -2^{-x^2+1} x \log 2 \end{aligned}$$

11 次の関数を微分せよ。 $y = \frac{\log x}{\sqrt{x}} = \frac{(\log x)'}{x^{\frac{1}{2}}}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\log x)' x^{\frac{1}{2}} - (\log x) \cdot (x^{\frac{1}{2}})'}{(x^{\frac{1}{2}})^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^{\frac{1}{2}} - (\log x) \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{x^1} \\ &= \frac{x^{-\frac{1}{2}} - \log x \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{x^1} \\ &= \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\log x}{\sqrt{x}}}{2x} = \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

12 次の関数を微分せよ。 $y = \log_{10}|3x-2|$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{(3x-2)\log_{10}} \times (3x-2)' \\ &= \frac{3}{(3x-2)\log_{10}} \end{aligned}$$

13 次の関数を微分せよ。 $y = \log(x + \sqrt{x^2+4})$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+4}} \times (x + \sqrt{x^2+4})' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+4}} \times \left\{ 1 + \frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \times (x^2+4)' \right\} \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+4}} \times \left\{ 1 + \frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \times 2x \right\} \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+4}} \times \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+4}} \times \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+4}} \times \frac{\sqrt{x^2+4} + x}{\sqrt{x^2+4}} \end{aligned}$$

14 次の関数を微分せよ。 $y = x^x \quad (x > 0)$

両辺に \log を取る

$$\log y = (\log x)^x$$

両辺に x を微分する

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (x)' \log x + x \cdot (\log x)'$$

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \log x + 1$$

$$y' = y(\log x + 1)$$

$$\therefore y = x^x \quad \text{F.T.}$$

$$y' = x^x (\log x + 1)$$