統一テスト（微分法）Ｈ３０．１１．２１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=\sqrt{2x}$ の $x=1$ における微分係数を定義に従って求めよ。

$\boxed{2}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$　　(2) $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$

$\boxed{3}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(3x-1)^3$　　(2) $y=(2x-1)(x-2)^2$

$\boxed{4}$ 次の関数を微分せよ。　$y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

$\boxed{5}$ 次の関数を微分せよ。　$y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{6}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\tan x^2$　　(2) $y=\sin^2 2x$

$\boxed{7}$ 次の関数を微分せよ。　$y=\sin^5 x\cos 5x$

$\boxed{8}$ 次の関数を微分せよ。ただし，a は 1 でない正の定数とする。

(1) $y=\log 4x$　　(2) $y=\log_a|x^2-5|$

$\boxed{9}$ 次の関数を微分せよ。ただし，a は 1 でない正の定数とする。

(1) $y=xe^{-3x}$　　(2) $y=a^{-3x}$

$\boxed{10}$ 次の関数を微分せよ。ただし，a は定数とする。　$y=\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$

$\boxed{11}$ 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x^2+y^2=5$　　(2) $2xy-3=0$

$\boxed{12}$ 曲線の媒介変数表示が次の式で与えられているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

$x=2(t-\sin t)$，$y=2(1-\cos t)$

$\boxed{13}$ $\log|y|$ の導関数を利用して，次の関数を微分せよ。　$y=\sqrt[3]{(x-2)(x^2-2)}$

$\boxed{14}$ 次の関数を微分せよ。　$y=x^{\sin x}$　$(x>0)$

$\boxed{15}$ 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，次の極限値を $f'(a)$ で表せ。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-4h)-f(a)}{h}$$

$\boxed{16}$ 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$ を求めよ。

$\boxed{17}$ 次の極限を求めよ。　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

$\boxed{18}$ 次の極限値を求めよ。ただし，a は正の定数とする。

$$\lim_{x\to a}\frac{a^2\sin^2 x-x^2\sin^2 a}{x-a}$$

$\boxed{19}$ $x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$　$(a>0,\ b>0)$ のとき，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を θ の式で表せ。

$\boxed{20}$ 関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-2 & (x\geqq 1) \\ x^3+(1-a)x^2 & (x<1) \end{cases}$$

$f(x)$ が $x=1$ で微分可能となるように，定数 a，b の値を定めよ。

統一テスト（微分法）Ｈ３０．１１．２１　答えがあってて、変形ができていないのは点数半分。分かってない −1　移項が −2

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=\sqrt{2x}$ の $x=1$ における微分係数を定義に従って求めよ。

解答 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　4

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(1+h)}-\sqrt{2}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)-2}{h(\sqrt{2(1+h)}+\sqrt{2})}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(1+h)}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{2}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{2}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$　　(2) $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$

解答 (1) $-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$　4　(2) $-\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$　4

(1) $y'=-\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

(2) $y'=\dfrac{(x-1)'(x^2+1)-(x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$

$\boxed{3}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(3x-1)^3$　　(2) $y=(2x-1)(x-2)^2$

展開になってても いい

解答 (1) $9(3x-1)^2$　4　(2) $6(x-2)(x-1)$　4

(1) $y'=3(3x-1)^2\cdot(3x-1)'=3(3x-1)^2\cdot 3=9(3x-1)^2$

(2) $y'=2(x-2)^2+(2x-1)\cdot 2(x-2)\cdot(x-2)'=2(x-2)^2+(2x-1)\cdot 2(x-2)$
$=2(x-2)\{(x-2)+(2x-1)\}=2(x-2)(3x-3)$
$=6(x-2)(x-1)$

ここはまだ計算途中

$\boxed{4}$ 次の関数を微分せよ。 $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

解答 $-\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x^7}}$　3

$y'=\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)'=-\dfrac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}=-\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x^7}}$

$-\dfrac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$ も o.k.

$-\dfrac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$ は 1点

$\boxed{5}$ 次の関数を微分せよ。 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

解答 $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$　4

$$y'=\frac{1\cdot\sqrt{1-x^2}-x(\sqrt{1-x^2})'}{1-x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$
$$=\frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$\boxed{6}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\tan x^2$　　(2) $y=\sin^2 2x$

解答 (1) $\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}$　4　(2) $2\sin 4x$　4

(1) $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x^2}\cdot(x^2)'=\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}$

(2) $y'=2\sin 2x\cdot(\sin 2x)'=2\sin 2x\cdot 2\cos 2x=2\sin 4x$

$\boxed{7}$ 次の関数を微分せよ。 $y=\sin^5 x\cos 5x$

解答 $5\sin^4 x\cos 6x$　4

$y'=5\sin^4 x\cdot(\sin x)'\cdot\cos 5x+\sin^5 x\cdot(-\sin 5x)\cdot(5x)'$
$=5\sin^4 x(\cos x)\cos 5x+\sin^5 x(-\sin 5x)\cdot 5$
$=5\sin^4 x(\cos x\cos 5x-\sin x\sin 5x)$
$=5\sin^4 x\cos 6x$

$\boxed{8}$ 次の関数を微分せよ。ただし，a は1でない正の定数とする。

(1) $y=\log 4x$　　(2) $y=\log_a|x^2-5|$

解答 (1) $\dfrac{1}{x}$　4　(2) $\dfrac{2x}{(x^2-5)\log a}$　4

(1) $y'=\dfrac{1}{4x}\cdot(4x)'=\dfrac{4}{4x}=\dfrac{1}{x}$

(2) $y'=\dfrac{1}{(x^2-5)\log a}\cdot(x^2-5)'=\dfrac{2x}{(x^2-5)\log a}$

$\dfrac{2x}{|x^2-5|\log a}$ は×

$\boxed{9}$ 次の関数を微分せよ。ただし，a は1でない正の定数とする。

(1) $y=xe^{-3x}$　　(2) $y=a^{-3x}$

解答 (1) $(1-3x)e^{-3x}$　4　(2) $-3a^{-3x}\log a$　4

(1) $y'=1\cdot e^{-3x}+xe^{-3x}\cdot(-3x)'=e^{-3x}-3xe^{-3x}=(1-3x)e^{-3x}$

(2) $y'=a^{-3x}\cdot\log a\cdot(-3x)'=a^{-3x}\cdot\log a\cdot(-3)=-3a^{-3x}\log a$

$\boxed{10}$ 次の関数を微分せよ。ただし，a は定数とする。 $y=\log(x+\sqrt{x^2+a})$

解答 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$　4

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}\right)=\frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+a}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{x^2+a}+x}}{\sqrt{x^2+a}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

約分

$\boxed{11}$ 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x^2+y^2=5$　　(2) $2xy-3=0$

陰関数を 用いてないと 2

解答 (1) $-\dfrac{x}{y}$　4　(2) $-\dfrac{y}{x}$　4

(1) $x^2+y^2=5$ の両辺を x で微分すると　$2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$y\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

(2) $2xy-3=0$ の両辺を x で微分すると　$2y+2x\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$x\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$

$\boxed{12}$ 曲線の媒介変数表示が次の式で与えられているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

$x=2(t-\sin t)$，$y=2(1-\cos t)$

解答 $\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$　4

$\dfrac{dx}{dt}=2(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dt}=2\sin t$ から　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

/71

13 $\log|y|$ の導関数を利用して，次の関数を微分せよ。　$y=\sqrt[3]{(x-2)(x^2-2)}$

解答　$\dfrac{3x^2-4x-2}{3\sqrt[3]{(x-2)^2(x^2-2)^2}}$　④

対数微分

(ていない→②)

両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y|=\frac{1}{3}(\log|x-2|+\log|x^2-2|)$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}+\frac{2x}{x^2-2}\right)=\frac{3x^2-4x-2}{3(x-2)(x^2-2)}$$　②

よって

$$y'=\frac{3x^2-4x-2}{3(x-2)(x^2-2)}\cdot\sqrt[3]{(x-2)(x^2-2)}=\frac{3x^2-4x-2}{3\sqrt[3]{(x-2)^2(x^2-2)^2}}$$

14 次の関数を微分せよ。　$y=x^{\sin x}$　$(x>0)$

解答　$x^{\sin x}\left(\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$　④

$x>0$ であるから　$x^{\sin x}>0$

両辺の自然対数をとると　$\log y=\sin x\log x$

両辺の関数を x で微分すると　$\dfrac{y'}{y}=\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}$　②

よって　$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

15 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，次の極限値を $f'(a)$ で表せ。

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a-4h)-f(a)}{h}$$

解答　$-4f'(a)$　③

マイナス忘れている者多し

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a-4h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{-4\cdot\frac{f(a-4h)-f(a)}{-4h}\right\}=-4f'(a)$$

16 極限 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}$ を求めよ。

解答　1　③

$f(x)=\log x$ とすると

$$\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\log x-0}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}=f'(1)$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}=\frac{1}{1}=1$

17 次の極限を求めよ。　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

まだ1とか∞という答えあり

解答　e^2　③

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}\times2}=e^2$$

18 次の極限値を求めよ。ただし，a は正の定数とする。

$$\lim_{x\to a}\frac{a^2\sin^2x-x^2\sin^2a}{x-a}$$

解答　$2a\sin a(a\cos a-\sin a)$　④

$f(x)=\sin^2x$ とすると，$f'(x)=2\sin x\cos x$ であるから

$$(\text{与式})=\lim_{x\to a}\frac{a^2(\sin^2x-\sin^2a)-(x^2-a^2)\sin^2a}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{a^2\cdot\frac{\sin^2x-\sin^2a}{x-a}-(x+a)\sin^2a\right\}$$

$$=a^2f'(a)-2a\sin^2a=2a\sin a(a\cos a-\sin a)$$

②

$a^2f'(a)-2af(a)$　②

19 $x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$　$(a>0,\ b>0)$ のとき，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を θ の式で表せ。

解答　$-\dfrac{b}{a^2\sin^3\theta}$　④

$\dfrac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=b\cos\theta$

よって，$\sin\theta\neq0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$

したがって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}\right)=\dfrac{d}{d\theta}\left(-\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}\right)\cdot\dfrac{d\theta}{dx}$

$$=-\frac{b(-\sin\theta\sin\theta-\cos\theta\cos\theta)}{a\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{-a\sin\theta}$$

$$=-\frac{b(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{a^2\sin^3\theta}=-\frac{b}{a^2\sin^3\theta}$$

②

20 関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx-2 & (x\geqq1)\\ x^3+(1-a)x^2 & (x<1)\end{cases}$$

$f(x)$ が $x=1$ で微分可能となるように，定数 a，b の値を定めよ。

解答　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=3$　④

関数 $f(x)$ が $x=1$ で微分可能であるとき，$f(x)$ は $x=1$ で連続であるから

$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$　すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)=f(1)$

よって　$1^3+(1-a)\cdot1^2=a\cdot1^2+b\cdot1-2$

ゆえに　$2a+b=4$　……①

②

したがって，① から

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{a(1+h)^2+b(1+h)-2-(a+b-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}(ah+2a+b)=2a+b=4$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{(1+h)^3+(1-a)(1+h)^2-(a+b-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\left\{h^2+(4-a)h+5-2a-\frac{2a+b-4}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to-0}\{h^2+(4-a)h+5-2a\}=5-2a$$

片側極限を用いるが

(用いていないと ②)

よって，$f'(1)$ が存在するための条件は　$4=5-2a$

ゆえに　$a=\dfrac{1}{2}$　　このとき，① から　$b=3$

/29