数学演習（関数の連続性）Ｒ１．５．１３　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の関数の連続性について調べよ。なお，(1) では関数の定義域もいえ。

(1)　$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$　　(2)　$-1\leqq x\leqq 2$ で　$f(x)=\log_{10}\dfrac{1}{|x|}$ $(x\neq 0)$，$f(0)=0$

(3)　$0\leqq x\leqq 2\pi$ で　$f(x)=[\cos x]$　　ただし，[　] はガウス記号。

$\boxed{2}$ 無限級数 $x+\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{x}{(1+x)^2}+\cdots\cdots+\dfrac{x}{(1+x)^{n-1}}+\cdots\cdots$ について

(1)　この無限級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(2)　x が (1) の範囲にあるとき，この無限級数の和を $f(x)$ とする。関数 $y=f(x)$ のグラフをかき，その連続性について調べよ。

$\boxed{3}$ (1)　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ を求めよ。

(2)　(1) で定めた関数 $f(x)$ がすべての x について連続であるように，定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{4}$ (1)　次の方程式は，与えられた範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

（ア）　$x^3-2x^2-3x+1=0$ $(-2<x<-1,\ 0<x<1,\ 2<x<3)$

（イ）　$\cos x=x$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$　　　　（ウ）　$\dfrac{1}{2^x}=x$ $(0<x<1)$

(2)　関数 $f(x)$，$g(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(x)$ の最大値は $g(x)$ の最大値より大きく，$f(x)$ の最小値は $g(x)$ の最小値より小さい。このとき，方程式 $f(x)=g(x)$ は，$a\leqq x\leqq b$ の範囲に解をもつことを示せ。

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n-1}-x^2+bx+c}{x^{2n}+1}$ について，次の問いに答えよ。ただし，a，b，c は定数で，$a>0$ とする。

(1)　関数 $f(x)$ が x の連続関数となるための定数 a，b，c の条件を求めよ。

(2)　定数 a，b，c が (1) で求めた条件を満たすとき，関数 $f(x)$ の最大値とそれを与える x の値を a を用いて表せ。

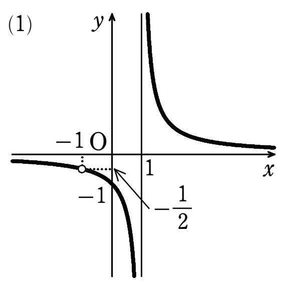
(3)　定数 a，b，c が (1) で求めた条件を満たし，関数 $f(x)$ の最大値が $\dfrac{5}{4}$ であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

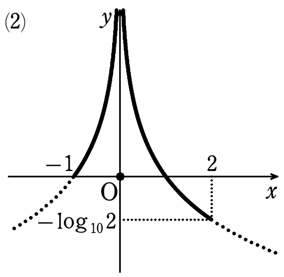
$\boxed{6}$ 関数 $f(x)$ が連続で $f(0)=-1$，$f(1)=2$，$f(2)=3$ のとき，方程式 $f(x)=x^2$ は $0<x<2$ の範囲に少なくとも 2 つの実数解をもつことを示せ。

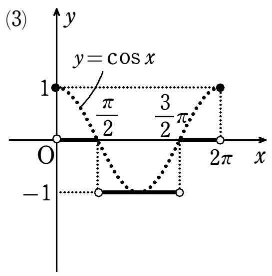
$\boxed{1}$ 次の関数の連続性について調べよ。なお，(1) では関数の定義域もいえ。

(1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$　　(2) $-1\leqq x\leqq 2$ で $f(x)=\log_{10}\dfrac{1}{|x|}$ $(x\neq 0)$，$f(0)=0$

(3) $0\leqq x\leqq 2\pi$ で $f(x)=[\cos x]$　　ただし，[ ] はガウス記号。







解答　(1) 定義域は $x<-1$，$-1<x<1$，$1<x$；定義域のすべての点で連続

(2) $-1\leqq x<0$，$0<x\leqq 2$ で連続；$x=0$ で不連続

(3) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi<x<2\pi$ で連続；$x=0$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$，2π で不連続

解説

(1) 定義域に属さない x の値は，$x^2-1=0$ から　$x=\pm 1$

よって，定義域は　$x<-1$，$-1<x<1$，$1<x$；定義域のすべての点で連続。

(2) $-1\leqq x<0$ のとき　$f(x)=\log_{10}\dfrac{1}{-x}=-\log_{10}(-x)$

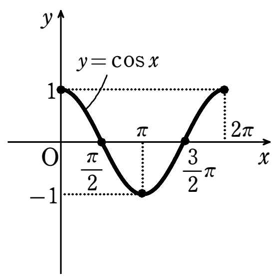
$0<x\leqq 2$ のとき　$f(x)=\log_{10}\dfrac{1}{x}=-\log_{10}x$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to +0}f(x)=\infty$

すなわち，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$ は存在しない。

ゆえに　$-1\leqq x<0$，$0<x\leqq 2$ で連続；$x=0$ で不連続。

(3) $0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，$y=\cos x$ のグラフは，右の図のようになる。



よって　$x=0$ のとき　$[\cos x]=1$

$0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$[\cos x]=0$

$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi$ のとき　$[\cos x]=-1$

$\dfrac{3}{2}\pi\leqq x<2\pi$ のとき　$[\cos x]=0$

$x=2\pi$ のとき　$[\cos x]=1$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to +0}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to 2\pi-0}f(x)=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to +0}f(x)\neq f(0)$，$\displaystyle\lim_{x\to 2\pi-0}f(x)\neq f(2\pi)$

また　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}f(x)=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi-0}f(x)=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi+0}f(x)=0$

ゆえに，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}f(x)$ は存在しない。

よって　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi<x<2\pi$ で連続；

$x=0$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$，2π で不連続。

参考　関数 $y=f(x)$ のグラフは次の図の実線部分のようになる。(2)，(3) については，このグラフをもとにして連続である区間，不連続である区間を判断してもよい。

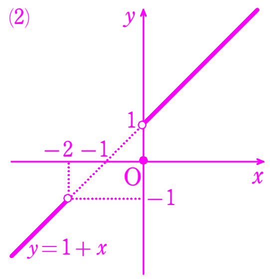
$\boxed{2}$ 無限級数 $x+\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{x}{(1+x)^2}+\cdots\cdots+\dfrac{x}{(1+x)^{n-1}}+\cdots\cdots$ について

(1) この無限級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(2) x が (1) の範囲にあるとき，この無限級数の和を $f(x)$ とする。関数 $y=f(x)$ のグラフをかき，その連続性について調べよ。

解答　(1) $x<-2$，$0\leqq x$

(2) [図]；$x<-2$，$0<x$ で連続；$x=0$ で不連続



解説

(1) この無限級数は，初項 x，公比 $\dfrac{1}{1+x}$ の無限等比級数である。

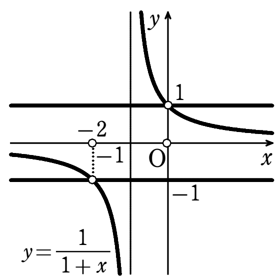
収束するための条件は

$x=0$　または　$-1<\dfrac{1}{1+x}<1$　……①

不等式 ① の解は，右の図から

$x<-2$，$0<x$

よって，求める x の値の範囲は　$x<-2$，$0\leqq x$



(2) 和について

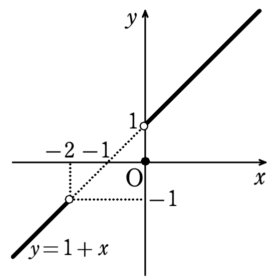
$x=0$ のとき　$f(x)=0$

$x<-2$，$0<x$ のとき

$$f(x)=\frac{x}{1-\dfrac{1}{1+x}}=1+x$$

関数 $y=f(x)$ の定義域は $x<-2$，$0\leqq x$ で，グラフは右の図のようになる。

よって　$x<-2$，$0<x$ で連続；$x=0$ で不連続



$\boxed{3}$ (1) $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ を求めよ。

(2) (1) で定めた関数 $f(x)$ がすべての x について連続であるように，定数 a，b の値を定めよ。

解答　(1) $x<-1$，$1<x$ のとき $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$，$x=-1$ のとき $f(x)=\dfrac{a-b+2}{2}$，

$x=1$ のとき $f(x)=\dfrac{a+b}{2}$，$-1<x<1$ のとき $f(x)=ax^2+bx$

(2) $a=1$，$b=-1$

解説

(1) $x<-1$，$1<x$ のとき　$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^{2n-2}}+\dfrac{b}{x^{2n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=1-\frac{1}{x}$

$x=-1$ のとき　$f(x)=f(-1)=\dfrac{a-b+2}{2}$

$x=1$ のとき　$f(x)=f(1)=\dfrac{a+b}{2}$

$-1<x<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=0$ であるから　$f(x)=ax^2+bx$

(2) $f(x)$ は $x<-1$，$-1<x<1$，$1<x$ において，それぞれ連続である。

したがって，$f(x)$ がすべての x について連続であるための条件は，$x=-1$ および $x=1$ で連続であることである。

よって　$\displaystyle\lim_{x\to -1-0}f(x)=\lim_{x\to -1+0}f(x)=f(-1)$

かつ　$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=f(1)$

ゆえに　$2=a-b=\dfrac{a-b+2}{2}$　かつ　$a+b=0=\dfrac{a+b}{2}$

これを解いて　$a=1$，$b=-1$

$\boxed{4}$ (1) 次の方程式は，与えられた範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

（ア）$x^3-2x^2-3x+1=0$ $(-2<x<-1,\ 0<x<1,\ 2<x<3)$

（イ）$\cos x=x$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$　　（ウ）$\dfrac{1}{2^x}=x$ $(0<x<1)$

(2) 関数 $f(x)$，$g(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(x)$ の最大値は $g(x)$ の最大値より大きく，$f(x)$ の最小値は $g(x)$ の最小値より小さい。このとき，方程式 $f(x)=g(x)$ は，$a\leqq x\leqq b$ の範囲に解をもつことを示せ。

解答　(1)（ア）略　（イ）略　（ウ）略　(2) 略

解説

(1)（ア）$f(x)=x^3-2x^2-3x+1$ とすると，関数 $f(x)$ は区間 $[-2,\ -1]$，$[0,\ 1]$，$[2,\ 3]$ で連続であり，かつ

$f(-2)=-9<0$，$f(-1)=1>0$，$f(0)=1>0$，

$f(1)=-3<0$，$f(2)=-5<0$，$f(3)=1>0$

よって，中間値の定理により，方程式 $f(x)=0$ は $-2<x<-1$，$0<x<1$，$2<x<3$ のそれぞれの範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

（イ）$g(x)=x-\cos x$ とすると，関数 $g(x)$ は区間 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ で連続であり，かつ

$g(0)=0-\cos 0=-1<0$，$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\cos\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}>0$

よって，中間値の定理により，方程式 $g(x)=0$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

（ウ）$h(x)=x-\dfrac{1}{2^x}$ とすると，関数 $h(x)$ は区間 $[0,\ 1]$ で連続であり，かつ

$$h(0)=0-\frac{1}{2^0}=-1<0,\ h(1)=1-\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}>0$$

よって，中間値の定理により，方程式 $h(x)=0$ は $0<x<1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

(2)　$h(x)=f(x)-g(x)$ とする。

関数 $f(x)$，$g(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続であるから，関数 $h(x)$ も区間 $[a,\ b]$ で連続である。

$f(x)$ が $x=x_1$ で最大，$x=x_2$ で最小であるとする。

また，$g(x)$ が $x=x_3$ で最大，$x=x_4$ で最小であるとする。

条件から　　$f(x_1)>g(x_3)$，$f(x_2)<g(x_4)$

一方，$g(x_3)$ は最大値であるから　　$g(x_3)\geqq g(x_1)$

$g(x_4)$ は最小値であるから　　$g(x_4)\leqq g(x_2)$

以上から　　$f(x_1)>g(x_3)\geqq g(x_1)$，$f(x_2)<g(x_4)\leqq g(x_2)$

よって　　$h(x_1)=f(x_1)-g(x_1)>0$，$h(x_2)=f(x_2)-g(x_2)<0$

したがって，方程式 $h(x)=0$ は x_1 と x_2 の間に解をもつ。

$a\leqq x_1\leqq b$，$a\leqq x_2\leqq b$ であるから，方程式 $h(x)=0$ すなわち $f(x)=g(x)$ は $a\leqq x\leqq b$ の範囲に解をもつ。

5　関数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n-1}-x^2+bx+c}{x^{2n}+1}$ について，次の問いに答えよ。ただし，a，b，c は定数で，$a>0$ とする。

(1)　関数 $f(x)$ が x の連続関数となるための定数 a，b，c の条件を求めよ。

(2)　定数 a，b，c が (1) で求めた条件を満たすとき，関数 $f(x)$ の最大値とそれを与える x の値を a を用いて表せ。

(3)　定数 a，b，c が (1) で求めた条件を満たし，関数 $f(x)$ の最大値が $\frac{5}{4}$ であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

解答　(1)　$a=b$，$c=1$

(2)　$0<a<2$ のとき $x=\frac{a}{2}$ で最大値 $1+\frac{a^2}{4}$，$2\leqq a$ のとき $x=1$ で最大値 a

(3)　$a=1$，$b=1$，$c=1$

解説

(1)　[1]　$-1<x<1$ のとき　　$\lim_{n\to\infty}x^n=0$ であるから　$f(x)=-x^2+bx+c$

[2]　$x=-1$ のとき　　$f(-1)=\frac{-a-1-b+c}{2}$

[3]　$x=1$ のとき　　$f(1)=\frac{a-1+b+c}{2}$

[4]　$x<-1$，$1<x$ のとき　　$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{x}-\frac{1}{x^{2n-2}}+\frac{b}{x^{2n-1}}+\frac{c}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{a}{x}$

$f(x)$ は $x<-1$，$-1<x<1$，$1<x$ において，それぞれ連続である。

したがって，$f(x)$ が x の連続関数となるための条件は，$x=-1$ および $x=1$ で連続であることである。

よって　　$\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}f(x)=f(-1)$　かつ　$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)=f(1)$

ゆえに　　$-a=-1-b+c=\frac{-a-1-b+c}{2}$，$-1+b+c=a=\frac{a-1+b+c}{2}$

したがって　　$a=b$，$c=1$

(2)　(1) の結果により

$-1<x<1$ のとき　　$f(x)=-x^2+ax+1=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+1+\frac{a^2}{4}$

$x=-1$ のとき　　$f(-1)=-a$

$x=1$ のとき　　$f(1)=a$

$x<-1$，$1<x$ のとき　　$f(x)=\frac{a}{x}$

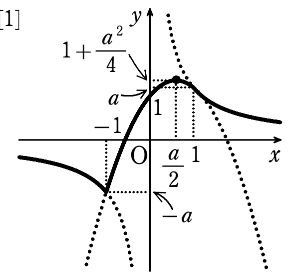
[1]　$0<\frac{a}{2}<1$ すなわち $0<a<2$ のとき　グラフは図 [1] のようになる。

よって　　$x=\frac{a}{2}$ で最大値 $1+\frac{a^2}{4}$

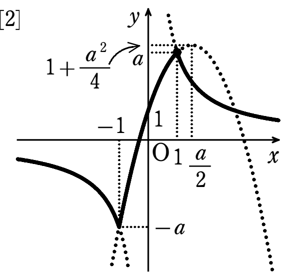
[2]　$1\leqq\frac{a}{2}$ すなわち $2\leqq a$ のとき　グラフは図 [2] のようになる。

よって　　$x=1$ で最大値 a

[1]



[2]



以上から　　$0<a<2$ のとき　$x=\frac{a}{2}$ で最大値 $1+\frac{a^2}{4}$

$2\leqq a$ のとき　　$x=1$ で最大値 a

(3)　[1]　$0<a<2$ のとき

最大値が $\frac{5}{4}$ となる条件は　　$1+\frac{a^2}{4}=\frac{5}{4}$

ゆえに　　$a^2=1$　　　$0<a<2$ であるから　　$a=1$

これと (1) の結果により　　$a=1$，$b=1$，$c=1$

[2]　$2\leqq a$ のとき

最大値が $\frac{5}{4}$ となる条件は　　$a=\frac{5}{4}$

これは $2\leqq a$ を満たさないから不適。

以上から　　$a=1$，$b=1$，$c=1$

6　関数 $f(x)$ が連続で $f(0)=-1$，$f(1)=2$，$f(2)=3$ のとき，方程式 $f(x)=x^2$ は $0<x<2$ の範囲に少なくとも 2 つの実数解をもつことを示せ。

解答　略

解説

$g(x)=f(x)-x^2$ とすると，関数 $f(x)$ と x^2 はともに連続であるから，関数 $g(x)$ も連続である。

$$g(0)=f(0)-0^2=-1<0,\quad g(1)=f(1)-1^2=2-1=1>0,$$
$$g(2)=f(2)-2^2=3-4=-1<0$$

よって，方程式 $g(x)=0$ すなわち $f(x)=x^2$ は，中間値の定理により，区間 $(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$ それぞれで少なくとも 1 つの実数解をもつ。

したがって，方程式 $f(x)=x^2$ は $0<x<2$ の範囲に少なくとも 2 つの実数解をもつ。