数学演習（関数の極限）Ｒ１．５．１２　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+8}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(x+1+\frac{2}{x-2}\right)$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{4x+1}}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{(2x-3)^2-1}-\sqrt{x^2-1}}{x-3}$

$\boxed{2}$ 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-4}=2$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3+ax+b}{x-2}=17$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to8}\frac{ax^2+bx+8}{\sqrt[3]{x}-2}=84$

$\boxed{3}$ 次の関数について，x が 1 に近づくときの右側極限，左側極限を求めよ。そして，$x\longrightarrow1$ のときの極限が存在するかどうかを調べよ。ただし，(4) の $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^2}$　(2) $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^3}$　(3) $\displaystyle\frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$　(4) $x-[x]$

$\boxed{4}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^3-3x^2+5)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+4x-1}{2x^2-3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x}{3^x+2^x}$

5 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\log_3 x+\log_3(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1})\right\}$　(2) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)$

6 次の極限値を求めよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}$　(2) $\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$

7 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$　(2) $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$　(3) $\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$

8 3 次関数 $f(x)$ が $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3+3}{x^2}=4$，$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=3$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

9 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}$　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}$　(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$　(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$　(6) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$　(7) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{\sin 3x}$

$\boxed{1}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+8}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(x+1+\frac{2}{x-2}\right)$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{4x+1}}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{(2x-3)^2-1}-\sqrt{x^2-1}}{x-3}$

解答　(1) $\frac{1}{3}$　(2) 0　(3) -1　(4) 1　(5) $-\frac{4}{3}$　(6) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

解説

(1) $\displaystyle(与式)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x-4}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$

(2) $\displaystyle(与式)=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2(x-1)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)}{x^2-2x+4}=\frac{0}{12}=0$

(3) $\displaystyle(与式)=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x+1)(x-2)+2}{x-2}\right\}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{(x-1)(x-2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{x}{x-2}=\frac{1}{-1}=-1$

(4) $\displaystyle(与式)=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{2}=1$

(5) $\displaystyle(与式)=\lim_{x\to2}\left\{\frac{(2x+5)-(4x+1)}{2x-(x+2)}\cdot\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{4x+1}}\right\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\left\{\frac{-2x+4}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{4x+1}}\right\}=(-2)\cdot\frac{\sqrt{4}+\sqrt{4}}{\sqrt{9}+\sqrt{9}}=-\frac{4}{3}$

(6) $\displaystyle(与式)=\lim_{x\to3}\frac{\{(2x-3)^2-1\}-(x^2-1)}{(x-3)\{\sqrt{(2x-3)^2-1}+\sqrt{x^2-1}\}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{3(x-1)(x-3)}{(x-3)\{\sqrt{(2x-3)^2-1}+\sqrt{x^2-1}\}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{3(x-1)}{\sqrt{(2x-3)^2-1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{6}{4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{2}$ 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-4}=2$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3+ax+b}{x-2}=17$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to8}\frac{ax^2+bx+8}{\sqrt[3]{x}-2}=84$

解答　(1) $a=8$，$b=-16$　(2) $a=5$，$b=-18$　(3) $a=1$，$b=-9$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-4}=2$ …… ① が成り立つとする。

$\displaystyle\lim_{x\to4}(x-4)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to4}(a\sqrt{x}+b)=0$

ゆえに　$a\cdot2+b=0$　　よって　$b=-2a$　…… ②

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{a(\sqrt{x}-2)}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{a(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to4}\frac{a}{\sqrt{x}+2}=\frac{a}{4}$

ゆえに，$\frac{a}{4}=2$ のとき ① が成り立つ。よって　$a=8$　② から　$b=-16$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3+ax+b}{x-2}=17$ …… ① が成り立つとする。

$\displaystyle\lim_{x\to2}(x-2)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to2}(x^3+ax+b)=0$

ゆえに　$8+2a+b=0$　　よって　$b=-2a-8$　…… ②

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3+ax+b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^3+ax-2a-8}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\{(x^2+2x+4)+a\}}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}(x^2+2x+4+a)=12+a$

ゆえに，$12+a=17$ のとき ① が成り立つ。よって　$a=5$　② から　$b=-18$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to8}\frac{ax^2+bx+8}{\sqrt[3]{x}-2}=84$ …… ① が成り立つとする。

$\displaystyle\lim_{x\to8}(\sqrt[3]{x}-2)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to8}(ax^2+bx+8)=0$

ゆえに　$64a+8b+8=0$　　よって　$b=-8a-1$　…… ②

このとき　$\displaystyle(与式)=\lim_{x\to8}\frac{ax^2-(8a+1)x+8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to8}\frac{(ax-1)(x-8)}{\sqrt[3]{x}-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to8}(ax-1)(\sqrt[3]{x^2}+2\cdot\sqrt[3]{x}+4)=12(8a-1)$

ゆえに，$12(8a-1)=84$ のとき ① が成り立つ。よって　$a=1$　② から　$b=-9$

$\boxed{3}$ 次の関数について，x が 1 に近づくときの右側極限，左側極限を求めよ。そして，$x\longrightarrow1$ のときの極限が存在するかどうかを調べよ。ただし，(4) の $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^2}$　(2) $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^3}$　(3) $\displaystyle\frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$　(4) $x-[x]$

解答　(1) 右側極限，左側極限ともに ∞；極限は存在する

(2) 右側極限は ∞，左側極限は $-\infty$；極限は存在しない

(3) 右側極限，左側極限ともに ∞；極限は存在する

(4) 右側極限は 0，左側極限は 1；極限は存在しない

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$

よって，右側極限，左側極限ともに ∞ であるから，極限は存在する。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{1}{(x-1)^3}=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{(x-1)^3}=-\infty$

よって，右側極限は ∞，左側極限は $-\infty$ であるから，極限は存在しない。

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}=\lim_{x\to1+0}\frac{(x+1)^2}{|(x+1)(x-1)|}=\lim_{x\to1+0}\frac{x+1}{x-1}=\infty$，

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}=\lim_{x\to1-0}\left\{-\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}\right\}=\lim_{x\to1-0}\left(-\frac{x+1}{x-1}\right)=\infty$

よって，右側極限，左側極限ともに ∞ であるから，極限は存在する。

(4) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}(x-[x])=1-1=0$，$\displaystyle\lim_{x\to1-0}(x-[x])=1-0=1$

よって，右側極限は 0，左側極限は 1 であるから，極限は存在しない。

$\boxed{4}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^3-3x^2+5)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+4x-1}{2x^2-3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x}{3^x+2^x}$

解答　(1) ∞　(2) $\frac{3}{2}$　(3) $-\frac{1}{2}$　(4) 0

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^3-3x^2+5)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}\right)=\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+4x-1}{2x^2-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{3}{x^2}}=\frac{3+0-0}{2-0}=\frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-x)-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}=\frac{-1}{\sqrt{1-0}+1}=-\frac{1}{2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x}{3^x+2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^x+1}=\frac{0}{0+1}=0$

$\boxed{5}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\log_3x+\log_3(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1})\right\}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)$

解答　(1) $-\frac{1}{2}$　(2) $-\frac{3}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\frac{1}{2}\log_3x+\log_3(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1})=\log_3\sqrt{x}+\log_3\frac{(3x+1)-(3x-1)}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}$

$\displaystyle=\log_3\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}$

であるから

$\displaystyle(与式)=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{2}{\sqrt{3+\frac{1}{x}}+\sqrt{3-\frac{1}{x}}}$

$\displaystyle=\log_3\frac{2}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}}-1}$

$\displaystyle=-\frac{3}{2}$

別解　$x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3t}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-3t)-t^2}{\sqrt{t^2-3t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t}{\sqrt{t^2-3t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{t}}+1}=-\frac{3}{2}$

$\boxed{6}$ 次の極限値を求めよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$

解答　(1) 3　(2) 5

解説

(1) 不等式 $[3x]\leqq3x<[3x]+1$ が成り立つ。

$x>0$ のとき，各辺を x で割ると　$\dfrac{[3x]}{x} \leqq 3 < \dfrac{[3x]}{x}+\dfrac{1}{x}$

ここで，$3<\dfrac{[3x]}{x}+\dfrac{1}{x}$ から　$3-\dfrac{1}{x}<\dfrac{[3x]}{x}$　ゆえに　$3-\dfrac{1}{x}<\dfrac{[3x]}{x} \leqq 3$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}=3$

(2)　$(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=\left[5^x\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}=5\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$

$x \longrightarrow \infty$ であるから，$x>1$，$0<\dfrac{1}{x}<1$ と考えてよい。

このとき　$\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}^0<\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}<\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}^1$

すなわち　$1<\left\{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}=1$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}=1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}=5\cdot1=5$

7　次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$　(3)　$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}$

解答　(1)　$-\dfrac{1}{2}$　(2)　1　(3)　0

解説

(1)　$x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと　$x \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$t \longrightarrow 0$

また　$\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)=-\sin t$，$2x-\pi=2t$

よって，求める極限値は　$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{2t}=\lim_{t\to0}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sin t}{t}=-\frac{1}{2}$

(2)　$\dfrac{1}{x}=t$ とおくと　$x \longrightarrow \infty$ のとき　$t \longrightarrow +0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1$

(3)　$-1 \leqq \sin\dfrac{1}{x} \leqq 1$，$x \neq 0$ であるから　$-x^2 \leqq x^2\sin\dfrac{1}{x} \leqq x^2$

$\displaystyle\lim_{x\to0}(-x^2)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$

8　3 次関数 $f(x)$ が $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3+3}{x^2}=4$，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-5}{x}=3$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=2x^3+4x^2+3x+5$

解説

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3+3}{x^2}$ が存在するから，$f(x)-2x^3$ は 2 次以下の整式である。

したがって　$f(x)-2x^3=ax^2+bx+c$　すなわち　$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$
とおける。

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3+3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c+3}{x^2}\right)=a$

よって，条件から　$a=4$　ゆえに　$f(x)=2x^3+4x^2+bx+c$

条件 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-5}{x}=3$ から　$\displaystyle\lim_{x\to0}\{f(x)-5\}=0$

よって　$c-5=0$　したがって　$c=5$

ゆえに　$f(x)=2x^3+4x^2+bx+5$

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-5}{x}=\lim_{x\to0}(2x^2+4x+b)=b$

条件から　$b=3$

以上により　$f(x)=2x^3+4x^2+3x+5$

9　次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}$　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{3x}$　(3)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sin5x}$　(4)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{x}$

(5)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$　(6)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}$　(7)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin2x}{\sin3x}$

解答　(1)　0　(2)　$\dfrac{4}{3}$　(3)　$\dfrac{2}{5}$　(4)　2　(5)　2　(6)　2　(7)　$-\dfrac{1}{3}$

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=\sin0=0$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{4x}\cdot\frac{4}{3}=1\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

別解　$4x=\theta$ とおくと，$x \longrightarrow 0$ のとき　$\theta \longrightarrow 0$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{3x}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\frac{3}{4}\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{4}{3}=1\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sin5x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin5x}\cdot\frac{2}{5}=1\cdot1\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\cdot2\cdot\frac{1}{\cos2x}=1\cdot2\cdot\frac{1}{1}=2$

(5)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot(1+\cos x)=1\cdot2=2$

(6)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{x^2}=\lim_{x\to0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\cdot1^2=2$

(7)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin2x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin3x}-\frac{\sin2x}{\sin3x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{3x}{\sin3x}\cdot\frac{1}{3}-\frac{\sin2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin3x}\cdot\frac{2}{3}\right)$

$\displaystyle=1\cdot\frac{1}{3}-1\cdot1\cdot\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$

別解　(与式)$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x-2\sin x\cos x}{3\sin x-4\sin^3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{\sin x}-2\cos x}{3-4\sin^2x}=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}$