数学演習（無限級数）R１．５．１１

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の無限級数の収束，発散について調べ，収束すればその和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\dfrac{1}{10\cdot13}+\cdots\cdots$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$　　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

$\boxed{2}$ 次の無限級数は発散することを示せ。

(1) $1-2+3-4+5-\cdots\cdots$　　(2) $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}+\cdots\cdots$

(3) $\sin^2\dfrac{\pi}{2}+\sin^2\pi+\sin^2\dfrac{3}{2}\pi+\sin^2 2\pi+\cdots\cdots$

$\boxed{3}$ (1) 次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めよ。

（ア） $\sqrt{3}+3+3\sqrt{3}+\cdots\cdots$　　（イ） $4-2\sqrt{3}+3-\cdots\cdots$

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$ の和を求めよ。

$\boxed{4}$ 無限級数 $(x-4)+\dfrac{x(x-4)}{2x-4}+\dfrac{x^2(x-4)}{(2x-4)^2}+\cdots\cdots$ $(x\neq2)$ について

(1) 無限級数が収束するときの実数 x の値の範囲を求めよ。

(2) 無限級数の和 S を求めよ。

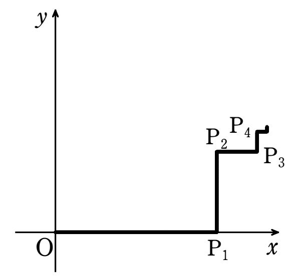
$\boxed{5}$ 次の循環小数を分数に直せ。

(1) $1.\dot{3}\dot{5}$　　(2) $0.5\dot{2}4\dot{3}$

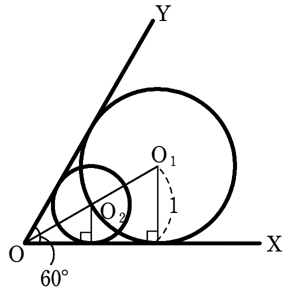
$\boxed{6}$ 右の図のように，$\mathrm{OP_1}=1$，$\mathrm{P_1P_2}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OP_1}$，

$\mathrm{P_2P_3}=\dfrac{1}{2}\mathrm{P_1P_2}$，…… と限りなく進むとき，点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，

$\mathrm{P_3}$，…… はどんな点に限りなく近づくか。



7　$\angle XOY\ [=60^\circ]$ の２辺 OX，OY に接する半径１の円の中心を O_1 とする。線分 OO_1 と円 O_1 との交点を中心とし，２辺 OX，OY に接する円を O_2 とする。以下，同じようにして，順に円 O_3，……，O_n，…… を作る。このとき，円 O_1，O_2，…… の面積の総和を求めよ。



8　初項，公比ともに実数の無限等比級数があり，その和は３で，各項の３乗からなる無限等比級数の和は６である。初めの無限等比級数の公比を求めよ。

9　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めよ。

$$\left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{2}{3^2}-\frac{1}{2^3}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{2}{3^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}+\cdots\cdots$$

10　無限級数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\cdots\cdots$　……① について

(1)　級数 ① の初項から第 n 項までの部分和を S_n とするとき，S_{2n-1}，S_{2n} をそれぞれ求めよ。

(2)　級数 ① の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めよ。

11　(1)　すべての自然数 n に対して，$2^n>n$ であることを示せ。

(2)　数列の和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ を求めよ。

(3)　$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

12　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^n\theta}{\sin^n\theta}$ が収束するのは，θ の値の範囲が ア$\boxed{}$ のときである。また，そのときの級数の和を $\tan\theta$ を用いて表すと，イ$\boxed{}$ である。

数学演習（無限級数）Ｒ１．５．１１　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

1 次の無限級数の収束，発散について調べ，収束すればその和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\dfrac{1}{10\cdot13}+\cdots\cdots$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$　　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

解答　(1) 収束，和 $\dfrac{1}{3}$　(2) 収束，和 $\dfrac{3}{4}$　(3) 発散　(4) 収束，和 1

解説

初項から第 n 項 a_n までの部分和を S_n とする。

(1) $a_n=\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$ であるから

$$S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)\qquad よって\qquad \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$$

ゆえに，この無限級数は収束して，その和は $\dfrac{1}{3}$ である。

(2) $a_n=\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{1}{(n+1)(n-1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ $(n\geqq2)$ であるから

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\qquad よって\qquad \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}$$

ゆえに，この無限級数は収束して，その和は $\dfrac{3}{4}$ である。

(3) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\dfrac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{(2n-1)-(2n+1)}=-\dfrac{1}{2}(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1})$

であるから

$$S_n=-\frac{1}{2}\{(\sqrt{1}-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})+\cdots\cdots+(\sqrt{2n-3}-\sqrt{2n-1})+(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1})\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)\qquad よって\qquad \lim_{n\to\infty}S_n=\infty$$

ゆえに，この無限級数は発散する。

(4) $a_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ であるから

$$S_n=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\qquad よって\qquad \lim_{n\to\infty}S_n=1$$

ゆえに，この無限級数は収束して，その和は 1 である。

2 次の無限級数は発散することを示せ。

(1) $1-2+3-4+5-\cdots\cdots$　　(2) $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}+\cdots\cdots$

(3) $\sin^2\dfrac{\pi}{2}+\sin^2\pi+\sin^2\dfrac{3}{2}\pi+\sin^2 2\pi+\cdots\cdots$

解答　(1) 略　(2) 略　(3) 略

解説

第 n 項を a_n とする。

(1) $a_n=(-1)^{n+1}n$

数列 $\{a_n\}$ は振動して 0 に収束しないから，無限級数は発散する。

(2) $a_n=\dfrac{n}{2n-1}$ であり　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$

数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束しないから，無限級数は発散する。

(3) $a_n=\sin^2\dfrac{n\pi}{2}$

k を自然数とすると，$n=2k-1$ のとき

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos k\pi=\begin{cases}1 & (k が奇数)\\ -1 & (k が偶数)\end{cases}$$

よって　$\sin^2\dfrac{n\pi}{2}=(\pm1)^2=1$

$n=2k$ のとき　$\sin^2\dfrac{n\pi}{2}=\sin^2 k\pi=0$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ は振動して 0 に収束しないから，無限級数は発散する。

3 (1) 次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めよ。

(ア) $\sqrt{3}+3+3\sqrt{3}+\cdots\cdots$　　(イ) $4-2\sqrt{3}+3-\cdots\cdots$

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$ の和を求めよ。

解答　(1) (ア) 発散　(イ) 収束，和 $8(2-\sqrt{3})$　(2) $\dfrac{3}{10}$

解説

(1) (ア) 初項は $\sqrt{3}$，公比は $r=\sqrt{3}$ で，$|r|>1$ であるから，発散する。

(イ) 初項は 4，公比は $r=-\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で，$|r|<1$ であるから，収束する。

和は　$\dfrac{4}{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\dfrac{8}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{8(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=8(2-\sqrt{3})$

(2) k を自然数とすると

$n=2k-1$ のとき　$\sin\dfrac{n\pi}{2}=\sin\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos k\pi=(-1)^{k+1}$

$n=2k$ のとき　$\sin\dfrac{n\pi}{2}=\sin k\pi=0$

よって，数列 $\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ は　$\dfrac{1}{3}$, 0, $-\dfrac{1}{3^3}$, 0, $\dfrac{1}{3^5}$, 0, $-\dfrac{1}{3^7}$, ……　となる。

ゆえに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{3^2}$ の無限等比級数であり，公比 r は

$|r|<1$ であるから収束する。その和は　$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{3^2}\right)}=\dfrac{3}{10}$

4 無限級数 $(x-4)+\dfrac{x(x-4)}{2x-4}+\dfrac{x^2(x-4)}{(2x-4)^2}+\cdots\cdots$ $(x\neq2)$ について

(1) 無限級数が収束するときの実数 x の値の範囲を求めよ。

(2) 無限級数の和 S を求めよ。

解答　(1) $x<\dfrac{4}{3}$，$4\leqq x$　(2) $x=4$ のとき $S=0$；$x<\dfrac{4}{3}$，$4<x$ のとき $S=2x-4$

解説

(1) 与えられた無限級数は，初項 $x-4$，公比 $\dfrac{x}{2x-4}$ の無限等比級数であるから，

収束するための条件は　$x-4=0$　または　$\left|\dfrac{x}{2x-4}\right|<1$

$x-4=0$ から　$x=4$　…… ①

また，$\left|\dfrac{x}{2x-4}\right|<1$ から　$|x|<|2x-4|$　よって　$|x|^2<|2x-4|^2$

整理して　$3x^2-16x+16>0$　ゆえに　$(3x-4)(x-4)>0$

これを解いて　$x<\dfrac{4}{3}$，$4<x$　…… ②

したがって，①，② から　$x<\dfrac{4}{3}$，$4\leqq x$

(2) $x=4$ のとき　$S=0$

$x<\dfrac{4}{3}$，$4<x$ のとき　$S=\dfrac{x-4}{1-\frac{x}{2x-4}}=2x-4$

5 次の循環小数を分数に直せ。

(1) $1.\dot{3}\dot{5}$　　(2) $0.\dot{5}24\dot{3}$

解答　(1) $\dfrac{134}{99}$　(2) $\dfrac{97}{185}$

解説

(1) $1.\dot{3}\dot{5}=1+0.35+0.0035+0.000035+\cdots\cdots$

$=1+0.35+\dfrac{0.35}{10^2}+\dfrac{0.35}{10^4}+\cdots\cdots$

$=1+\dfrac{0.35}{1-\frac{1}{10^2}}=1+\dfrac{35}{100-1}=1+\dfrac{35}{99}=\dfrac{134}{99}$

(2) $0.\dot{5}24\dot{3}=0.5+0.0243+0.0000243+0.0000000243+\cdots\cdots$

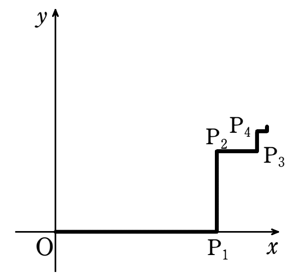
$=0.5+\dfrac{243}{10^4}+\dfrac{243}{10^7}+\dfrac{243}{10^{10}}+\cdots\cdots$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{243}{10^4}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{10^3}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{243}{9990}=\dfrac{97}{185}$

6 右の図のように，$OP_1=1$，$P_1P_2=\dfrac{1}{2}OP_1$，

$P_2P_3=\dfrac{1}{2}P_1P_2$，…… と限りなく進むとき，点 P_1，P_2，

P_3，…… はどんな点に限りなく近づくか。



解答　点 $\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

解説

求める座標を $(a,\ b)$ とすると

$a=OP_1+P_2P_3+P_4P_5+\cdots\cdots=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots\cdots$

$b=P_1P_2+P_3P_4+P_5P_6+\cdots\cdots=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^5}+\cdots\cdots$

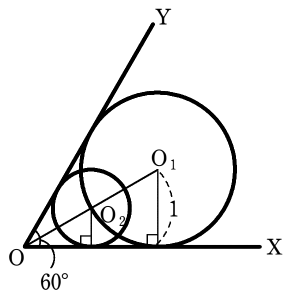
a，b はともに公比 $r=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数で表される。

$|r|<1$ であるから，これらの無限等比級数は収束して

$$a=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3},\quad b=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

したがって，点 P_1，P_2，P_3，…… は，点 $\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ に限りなく近づく。

7 $\angle XOY$ $[=60°]$ の 2 辺 OX，OY に接する半径 1 の円の中心を O_1 とする。線分 OO_1 と円 O_1 との交点を中心とし，2 辺 OX，OY に接する円を O_2 とする。以下，同じようにして，順に円 O_3，……，O_n，…… を作る。このとき，円 O_1，O_2，…… の面積の総和を求めよ。



解答 $\frac{4}{3}\pi$

解説

円 O_n の半径，面積を，それぞれ r_n，S_n とする。

$\angle XOO_n=60°\div 2=30°$ であるから　$OO_n=2r_n$

よって　$OO_{n+1}=2r_{n+1}$

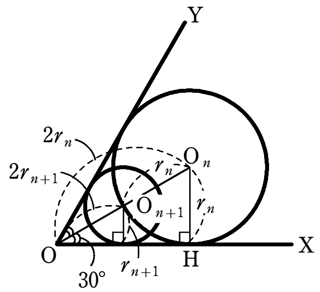
$OO_n=OO_{n+1}+O_nO_{n+1}$ から

$2r_n=2r_{n+1}+r_n$

ゆえに　$r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n$　また　$r_1=1$

よって　$r_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって　$S_n=\pi {r_n}^2=\pi\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$



ゆえに，円 O_1，O_2，…… の面積の総和 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は，初項 π，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数であり，$\left|\frac{1}{4}\right|<1$ であるから，収束する。

よって，その和は　$\frac{\pi}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\pi$

8 初項，公比ともに実数の無限等比級数があり，その和は 3 で，各項の 3 乗からなる無限等比級数の和は 6 である。初めの無限等比級数の公比を求めよ。

解答 $\frac{10-\sqrt{51}}{7}$

解説

初めの無限等比級数の初項を a，公比を r とする。

無限等比級数の和が 3 であるから，$a\neq 0$ であり，このとき

$\frac{a}{1-r}=3$ ……①　かつ　$|r|<1$ ……②

各項の 3 乗からなる無限等比級数の初項は a^3，公比は r^3，和が 6 であるから

$\frac{a^3}{1-r^3}=6$ ……③　かつ　$|r^3|<1$ ……④

① から　$a=3(1-r)$　……①′

③ から　$a^3=6(1-r^3)$　……③′

①′ を ③′ に代入して　$9(1-r)^3=2(1-r^3)$

すなわち　$9(1-r)^3=2(1-r)(1+r+r^2)$

両辺を $1-r$ で割って　$9(1-r)^2=2(1+r+r^2)$

整理すると　$7r^2-20r+7=0$　これを解いて　$r=\frac{10\pm\sqrt{51}}{7}$

このうち，②，④ を満たすものは　$r=\frac{10-\sqrt{51}}{7}$

9 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めよ。

$$\left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{2}{3^2}-\frac{1}{2^3}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{2}{3^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}+\cdots\cdots$$

解答 収束，和 $\frac{8}{3}$

解説

初項から第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}\right)-\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\right\}$$

$$=\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

よって　$\lim_{n\to\infty}S_n=3\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{8}{3}$

ゆえに，この無限級数は収束して，その和は $\frac{8}{3}$

別解　$(与式)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ は初項 2，公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ は初項 $-\frac{1}{2}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の無限等比級数

で，公比の絶対値が 1 より小さいから，この無限等比級数はともに収束する。

ゆえに，与えられた無限級数は収束して，その和は

$$(与式)=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{8}{3}$$

10 無限級数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\cdots\cdots$　……① について

(1) 級数 ① の初項から第 n 項までの部分和を S_n とするとき，S_{2n-1}，S_{2n} をそれぞれ求めよ。

(2) 級数 ① の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めよ。

解答 (1) $S_{2n-1}=1$，$S_{2n}=1-\frac{1}{n+1}$　(2) 収束，和 1

解説

(1) $S_{2n-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\cdots\cdots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$

$$=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)-\cdots\cdots-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)=1$$

$S_{2n}=S_{2n-1}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$

(2) (1) から　$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$，$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

よって　$\lim_{n\to\infty}S_n=1$

したがって，無限級数 ① は収束して，その和は 1

11 (1) すべての自然数 n に対して，$2^n>n$ であることを示せ。

(2) 数列の和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

解答 (1) 略　(2) $S_n=\frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\frac{n}{3\cdot 4^{n-1}}$　(3) $\frac{16}{9}$

解説

(1) 二項定理により　$(1+1)^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n>{}_nC_1$

よって　$2^n>n$

ゆえに，すべての自然数 n に対して $2^n>n$ が成り立つ。

(2) $S_n=1+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots\cdots+n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\frac{1}{4}S_n=\quad\frac{1}{4}+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+n\left(\frac{1}{4}\right)^n$

よって　$S_n-\frac{1}{4}S_n=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ゆえに　$\frac{3}{4}S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}-n\left(\frac{1}{4}\right)^n$

したがって　$S_n=\frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\frac{n}{3\cdot 4^{n-1}}$

(3) (1) により　$0<\frac{n}{4^{n-1}}<\frac{2^n}{4^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-2}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4^{n-1}}=0$

よって，(2) により　$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{16}{9}(1-0)-\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{16}{9}$

12 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^n\theta}{\sin^n\theta}$ が収束するのは，θ の値の範囲が ア［　　］ のときである。また，そのときの級数の和を $\tan\theta$ を用いて表すと，イ［　　］ である。

解答 (ア) $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$　(イ) $\frac{1}{\tan\theta-1}$

解説

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}>0$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^n\theta}{\sin^n\theta}$ すなわち $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)^n$ は，初項 $\frac{1}{\tan\theta}$，公比 $\frac{1}{\tan\theta}$ の無限等比級数であり，これが収束するための条件は　$0<\frac{1}{\tan\theta}<1$

したがって　$\tan\theta>1$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから　ア $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$

このとき，級数の和は　$\frac{1}{\tan\theta}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\tan\theta}}=$ イ $\frac{1}{\tan\theta-1}$