数学演習（数列の極限）Ｒ１．５．１０　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ (1)　数列 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\cdots\cdots$ の極限を調べよ。

(2)　第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

（ア）$\sqrt{4n-2}$　　（イ）$\dfrac{n}{1-n^2}$　　（ウ）$n^4+(-n)^3$　　（エ）$\dfrac{3n^2+n+1}{n+1}-3n$

$\boxed{2}$ 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1)　$\dfrac{2n+3}{\sqrt{3n^2+n}+n}$　　(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$　　(3)　$n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})$

(4)　$\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$　　(5)　$\log_3\dfrac{\sqrt[n]{7}}{5^n}$　　(6)　$\sin\dfrac{n\pi}{2}$　　(7)　$\tan n\pi$

$\boxed{3}$ 次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(2n)^2}{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\log_2(1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3)-\log_2(n^4+1)\}$

$\boxed{4}$ (1)　次の関係を満たす数列 $\{a_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。

（ア）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n=1$　　（イ）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3}{2a_n+1}=2$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+2n+3})=3$ が成り立つとき，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sin\frac{n\pi}{2}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right\}$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

$\boxed{6}$ n は $n\geqq3$ の整数とする。

(1)　不等式 $2^n>\dfrac{1}{6}n^3$ が成り立つことを，二項定理を用いて示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}$ の値を求めよ。

$\boxed{7}$ 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$　　(2) 3^n-2^n　　(3) $\dfrac{3^n-1}{2^n+1}$

(4) $\dfrac{2^n+1}{(-3)^n-2^n}$　　(5) $\dfrac{r^{2n+1}-1}{r^{2n}+1}$ (r は実数)

$\boxed{8}$ 次の数列が収束するように，実数 x の値の範囲を定めよ。また，そのときの数列の極限値を求めよ。

(1) $\left\{\left(\dfrac{2}{3}x\right)^n\right\}$　　(2) $\{(x^2-4x)^n\}$　　(3) $\left\{\left(\dfrac{x^2+2x-5}{x^2-x+2}\right)^n\right\}$

$\boxed{9}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$　　(2) $a_1=5$，$a_{n+1}=2a_n-4$

$\boxed{10}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。

$$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}=\frac{1}{4}(a_{n+1}+3a_n)$$

$\boxed{11}$ 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-4}{a_n-1}$ によって定められるとき

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ とおくとき，b_{n+1}，b_n の関係式を求めよ。

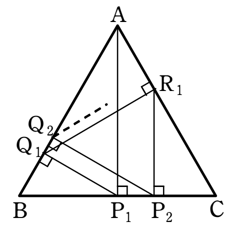
(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$\boxed{12}$ 数列 $\{a_n\}$ が $0<a_1<3$，$a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$) を満たすとき

(1) $0<a_n<3$ を証明せよ。　　(2) $3-a_{n+1}<\dfrac{1}{3}(3-a_n)$ を証明せよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。

$\boxed{13}$ 図のような1辺の長さ a の正三角形ABCにおいて，頂点Aから辺BCに下ろした垂線の足を P_1 とする。P_1 から辺ABに下ろした垂線の足を Q_1，Q_1 から辺CAへの垂線の足を R_1，R_1 から辺BCへの垂線の足を P_2 とする。このような操作を繰り返すと，辺BC上に点 P_1，P_2，……，P_n，…… が定まる。このとき，点 P_n の極限の位置を求めよ。



1 (1) 数列 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, …… の極限を調べよ。

(2) 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

（ア） $\sqrt{4n-2}$　（イ） $\frac{n}{1-n^2}$　（ウ） $n^4+(-n)^3$　（エ） $\frac{3n^2+n+1}{n+1}-3n$

解答 (1) 1 に収束　(2) （ア） ∞　（イ） 0　（ウ） ∞　（エ） -2

解説

(1) 第 n 項は $\frac{n}{n+1}$

よって $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$　つまり，1 に収束する。

(2) （ア） $\lim_{n\to\infty}\sqrt{4n-2}=\infty$

（イ） $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}-1}=\frac{0}{0-1}=0$

（ウ） $\lim_{n\to\infty}\{n^4+(-n)^3\}=\lim_{n\to\infty}n^4\left(1-\frac{1}{n}\right)=\infty$

（エ） $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n+1}{n+1}-3n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1-3n(n+1)}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n+1}{n+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=-2$$

2 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $\frac{2n+3}{\sqrt{3n^2+n}+n}$　(2) $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$　(3) $n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})$

(4) $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$　(5) $\log_3\frac{\sqrt[n]{7}}{5^n}$　(6) $\sin\frac{n\pi}{2}$　(7) $\tan n\pi$

解答 (1) $\sqrt{3}-1$　(2) 2　(3) $\frac{1}{2}$　(4) $\frac{2}{3}$　(5) $-\infty$　(6) 振動　(7) 0

解説

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{3n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{3+\frac{1}{n}}+1}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\sqrt{3}-1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(n^2+n)-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)=2$$

(3) $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{(n^2+2)-(n^2+1)\}}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})}\cdot\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{3(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}{3\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=\frac{2}{3}$$

(5) $\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{\sqrt[n]{7}}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log_3 7-n\log_3 5\right)=-\infty$

(6) 数列は 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, …… となり一定の値に収束せず，正の無限大にも負の無限大にも発散しない。

よって，振動する (極限はない)。

(7) すべての自然数 n に対して　$\tan n\pi=0$

よって，この数列のすべての項は 0 であるから，極限は 0

3 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(2n)^2}{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\{\log_2(1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3)-\log_2(n^4+1)\}$

解答 (1) 7　(2) -2

解説

(1) $(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(2n)^2=\sum_{k=1}^{n}(n+k)^2=\sum_{k=1}^{n}(n^2+2nk+k^2)$

$$=n^2\cdot n+2n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(6n^2+6n^2+6n+2n^2+3n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(14n^2+9n+1)$$

よって　(与式) $=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(14n^2+9n+1)}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{14n^2+9n+1}{2n^2+3n+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{14+\frac{9}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=7$$

(2) (与式) $=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_2\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\log_2(n^4+1)\right\}=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n^2(n+1)^2}{4(n^4+1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}=\log_2\frac{1}{4}=-2$$

4 (1) 次の関係を満たす数列 $\{a_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty}a_n$ と $\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。

（ア） $\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n=1$　（イ） $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3}{2a_n+1}=2$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+2n+3})=3$ が成り立つとき，定数 a の値を求めよ。

解答 (1) 順に （ア） 0, $\frac{1}{2}$　（イ） $-\frac{5}{3}$, $-\infty$　(2) $a=8$

解説

(1) （ア） $a_n=(2n-1)a_n\times\frac{1}{2n-1}$ であり

$$\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$$

よって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=1\times0=0$

$na_n=(2n-1)a_n\times\frac{n}{2n-1}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$ から

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

（イ） $\frac{a_n-3}{2a_n+1}=b_n$ とおき，両辺に $2a_n+1$ を掛けると

$$a_n-3=(2a_n+1)b_n$$

ゆえに　$(2b_n-1)a_n=-(b_n+3)$

$b_n=\frac{1}{2}$ とすると $0\cdot a_n=-\frac{7}{2}$ となり，これは不合理である。

よって，$b_n\neq\frac{1}{2}$ であるから　$a_n=-\frac{b_n+3}{2b_n-1}$

$\lim_{n\to\infty}b_n=2$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{b_n+3}{2b_n-1}\right)=-\frac{2+3}{2\cdot2-1}=-\frac{5}{3}$$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}na_n=-\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+2n+3})=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+an+2)-(n^2+2n+3)}{\sqrt{n^2+an+2}+\sqrt{n^2+2n+3}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}$$

$$=\frac{a-2}{2}$$

よって，条件から　$\frac{a-2}{2}=3$　ゆえに　$a=8$

5 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sin\frac{n\pi}{2}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right\}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解答 (1) 0　(2) 0　(3) 1

解説

(1) $-1\leqq\sin\frac{n\pi}{2}\leqq1$ であるから　$-\frac{1}{n+1}\leqq\frac{1}{n+1}\sin\frac{n\pi}{2}\leqq\frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sin\frac{n\pi}{2}=0$

(2) $\dfrac{1}{(n+k)^2}<\dfrac{1}{n^2}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ であるから，

$a_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}$ とおくと　$a_n<\dfrac{1}{n^2}\cdot n=\dfrac{1}{n}$

よって　$0<a_n<\dfrac{1}{n}$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}<\dfrac{1}{n}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ であるから，

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ とおくと

$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\cdot n\leqq a_n<\dfrac{1}{n}\cdot n$　すなわち　$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqq a_n<1$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$

6 n は $n\geqq3$ の整数とする。

(1) 不等式 $2^n>\dfrac{1}{6}n^3$ が成り立つことを，二項定理を用いて示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}$ の値を求めよ。

解答　(1) 略　(2) 0

解説

(1) $n\geqq3$ のとき

$$2^n=(1+1)^n=1+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+1$$
$$\geqq1+n+\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$
$$=\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1>\frac{1}{6}n^3$$

よって　$2^n>\dfrac{1}{6}n^3$

(2) (1) の結果から　$0<\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{6}{n^3}$　よって　$0<\dfrac{n^2}{2^n}<\dfrac{6}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$

7 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$　(2) 3^n-2^n　(3) $\dfrac{3^n-1}{2^n+1}$

(4) $\dfrac{2^n+1}{(-3)^n-2^n}$　(5) $\dfrac{r^{2n+1}-1}{r^{2n}+1}$ (r は実数)

解答　(1) ∞　(2) ∞　(3) ∞　(4) 0

(5) $r<-1$, $1<r$ のとき r；$r=-1$ のとき -1；$r=1$ のとき 0；$-1<r<1$ のとき -1

解説

(1) $\dfrac{3}{2}>1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3^n-2^n)=\lim_{n\to\infty}3^n\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{(-3)^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{0+0}{1-0}=0$

(5) $a_n=\dfrac{r^{2n+1}-1}{r^{2n}+1}$ とおく。

$r<-1$, $1<r$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{r-\frac{1}{r^{2n}}}{1+\frac{1}{r^{2n}}}=r$

$r=-1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-1-1}{1+1}=-1$

$r=1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1}{1+1}=0$

$-1<r<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(r^2)^nr-1}{(r^2)^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

8 次の数列が収束するように，実数 x の値の範囲を定めよ。また，そのときの数列の極限値を求めよ。

(1) $\left\{\left(\dfrac{2}{3}x\right)^n\right\}$　(2) $\{(x^2-4x)^n\}$　(3) $\left\{\left(\dfrac{x^2+2x-5}{x^2-x+2}\right)^n\right\}$

解答　(1) $-\dfrac{3}{2}<x\leqq\dfrac{3}{2}$；極限値は $-\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{3}{2}$ のとき 0，$x=\dfrac{3}{2}$ のとき 1

(2) $2-\sqrt{5}\leqq x<2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}<x\leqq2+\sqrt{5}$；極限値は $2-\sqrt{5}<x<2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}<x<2+\sqrt{5}$ のとき 0；$x=2\pm\sqrt{5}$ のとき 1

(3) $x<-\dfrac{3}{2}$, $1<x\leqq\dfrac{7}{3}$；極限値は

$x<-\dfrac{3}{2}$, $1<x<\dfrac{7}{3}$ のとき 0；$x=\dfrac{7}{3}$ のとき 1

解説

(1) 収束するための条件は　$-1<\dfrac{2}{3}x\leqq1$　……［A］

これを解いて　$-\dfrac{3}{2}<x\leqq\dfrac{3}{2}$

また，［A］で $\dfrac{2}{3}x=1$ となるのは，$x=\dfrac{3}{2}$ のときであるから，数列の極限値は

$-\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{3}{2}$ のとき 0，$x=\dfrac{3}{2}$ のとき 1

(2) 収束するための条件は　$-1<x^2-4x\leqq1$　……［A］

$-1<x^2-4x$ から　$x^2-4x+1>0$

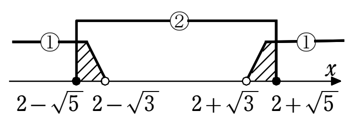
$x^2-4x+1=0$ の解は　$x=2\pm\sqrt{3}$

よって　$x<2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}<x$ …… ①

$x^2-4x\leqq1$ から　$x^2-4x-1\leqq0$

$x^2-4x-1=0$ の解は　$x=2\pm\sqrt{5}$

よって　$2-\sqrt{5}\leqq x\leqq2+\sqrt{5}$　…… ②



ゆえに，収束するときの実数 x の値の範囲は，① かつ ② から

$2-\sqrt{5}\leqq x<2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}<x\leqq2+\sqrt{5}$

また，［A］で $x^2-4x=1$ となるのは，$x=2\pm\sqrt{5}$ のときであるから，数列の極限値は

$2-\sqrt{5}<x<2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}<x<2+\sqrt{5}$ のとき 0；$x=2\pm\sqrt{5}$ のとき 1

(3) 収束するための条件は　$-1<\dfrac{x^2+2x-5}{x^2-x+2}\leqq1$　……［A］

$x^2-x+2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ であるから，各辺に x^2-x+2 を掛けて

$$-(x^2-x+2)<x^2+2x-5\leqq x^2-x+2$$

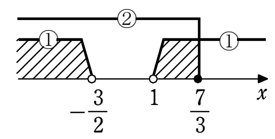
$-(x^2-x+2)<x^2+2x-5$ から　$2x^2+x-3>0$

ゆえに　$(2x+3)(x-1)>0$

よって　$x<-\dfrac{3}{2}$, $1<x$　…… ①

$x^2+2x-5\leqq x^2-x+2$ から　$3x\leqq7$

よって　$x\leqq\dfrac{7}{3}$　…… ②



ゆえに，収束するときの実数 x の値の範囲は，① かつ ② から

$x<-\dfrac{3}{2}$, $1<x\leqq\dfrac{7}{3}$

また，［A］で $\dfrac{x^2+2x-5}{x^2-x+2}=1$ となるのは，$x=\dfrac{7}{3}$ のときであるから，数列の極限値は

$x<-\dfrac{3}{2}$, $1<x<\dfrac{7}{3}$ のとき 0；$x=\dfrac{7}{3}$ のとき 1

9 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1) $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$　(2) $a_1=5$, $a_{n+1}=2a_n-4$

解答　(1) 2　(2) ∞

解説

(1) 与えられた漸化式を変形すると

$a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$　また　$a_1-2=1-2=-1$

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は初項 -1，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列で

$a_n-2=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　ゆえに　$a_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=2$

(2) 与えられた漸化式を変形すると

$a_{n+1}-4=2(a_n-4)$　また　$a_1-4=5-4=1$

よって，数列 $\{a_n-4\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列で

$a_n-4=2^{n-1}$　ゆえに　$a_n=2^{n-1}+4$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(2^{n-1}+4)=\infty$

10 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。

$$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}=\frac{1}{4}(a_{n+1}+3a_n)$$

解答　$\dfrac{4}{7}$

解説

与えられた漸化式を変形すると

$a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{3}{4}(a_{n+1}-a_n)$　また　$a_2-a_1=1-0=1$

ゆえに，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 1，公比 $-\dfrac{3}{4}$ の等比数列で

$$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}=0+\frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}=\frac{4}{7}$

別解　与えられた漸化式を変形すると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{3}{4}(a_{n+1}-a_n),\quad a_{n+2}+\frac{3}{4}a_{n+1}=a_{n+1}+\frac{3}{4}a_n$$

ゆえに　$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$，$a_{n+1}+\frac{3}{4}a_n=a_2+\frac{3}{4}a_1=1$

辺々引いて　$-\frac{7}{4}a_n=\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}-1$

よって　$a_n=\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}=\frac{4}{7}$

11 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-4}{a_n-1}$ によって定められるとき

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ とおくとき，b_{n+1}，b_n の関係式を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

解答　(1) $b_{n+1}=b_n+1$　(2) $a_n=\dfrac{1}{n}+2$　(3) 2

解説

(1) 漸化式から　$a_{n+1}-2=\dfrac{3a_n-4}{a_n-1}-2$

ゆえに　$a_{n+1}-2=\dfrac{a_n-2}{a_n-1}$

両辺の逆数をとって　$\dfrac{1}{a_{n+1}-2}=\dfrac{a_n-1}{a_n-2}$

よって　$\dfrac{1}{a_{n+1}-2}=\dfrac{1}{a_n-2}+1$

したがって　$b_{n+1}=b_n+1$

(2) (1) より，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=1$，公差 1 の等差数列であるから

$$b_n=1+(n-1)\cdot 1=n$$

よって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}+2=\dfrac{1}{n}+2$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+2\right)=2$

12 数列 $\{a_n\}$ が $0<a_1<3$，$a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとき

(1) $0<a_n<3$ を証明せよ。　(2) $3-a_{n+1}<\dfrac{1}{3}(3-a_n)$ を証明せよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。

解答　(1) 略　(2) 略　(3) 3

解説

(1) $0<a_n<3$ ……① とする。

[1] $n=1$ のとき，与えられた条件から ① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると　$0<a_k<3$

$n=k+1$ のときを考えると，$0<a_k<3$ であるから

$$a_{k+1}=1+\sqrt{1+a_k}>2>0,\quad a_{k+1}=1+\sqrt{1+a_k}<1+\sqrt{1+3}=3$$

したがって　$0<a_{k+1}<3$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

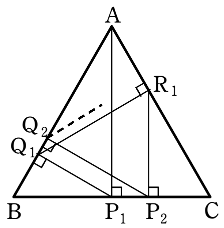
(2) $3-a_{n+1}=2-\sqrt{1+a_n}=\dfrac{3-a_n}{2+\sqrt{1+a_n}}<\dfrac{1}{3}(3-a_n)$

(3) (1)，(2) から　$0<3-a_n\leqq\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3-a_n)=0$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=3$

13 図のような 1 辺の長さ a の正三角形 ABC において，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を P_1 とする。P_1 から辺 AB に下ろした垂線の足を Q_1，Q_1 から辺 CA への垂線の足を R_1，R_1 から辺 BC への垂線の足を P_2 とする。このような操作を繰り返すと，辺 BC 上に点 P_1，P_2，……，P_n，…… が定まる。このとき，点 P_n の極限の位置を求めよ。



解答　辺 BC を 2 : 1 に内分する点

解説

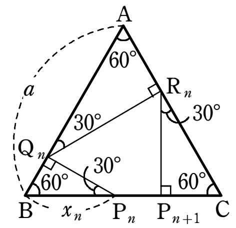
$BP_n=x_n$ とすると，$BP_n:BQ_n=AQ_n:AR_n=CR_n:CP_{n+1}=2:1$ であるから

$$BQ_n=\frac{1}{2}BP_n=\frac{1}{2}x_n,\quad AR_n=\frac{1}{2}AQ_n=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{2}x_n\right),$$

$$CR_n=CA-AR_n=a-\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{2}x_n\right)=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}x_n,$$

$$CP_{n+1}=\frac{1}{2}CR_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}x_n\right)=\frac{1}{4}a+\frac{1}{8}x_n,$$

$$BP_{n+1}=BC-CP_{n+1}=a-\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{8}x_n\right)=\frac{3}{4}a-\frac{1}{8}x_n$$



ゆえに　$x_{n+1}=-\dfrac{1}{8}x_n+\dfrac{3}{4}a$

変形すると　$x_{n+1}-\dfrac{2}{3}a=-\dfrac{1}{8}\left(x_n-\dfrac{2}{3}a\right)$

よって，数列 $\left\{x_n-\dfrac{2}{3}a\right\}$ は初項 $x_1-\dfrac{2}{3}a$，公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列であり

$$x_n-\frac{2}{3}a=\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\left(x_1-\frac{2}{3}a\right)$$

ゆえに　$x_n=\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}\left(x_1-\dfrac{2}{3}a\right)+\dfrac{2}{3}a$　　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{3}a$

したがって，点 P_n の極限の位置は辺 BC を 2 : 1 に内分する点である。