数学演習（関数の極限）Ｈ２４．１２．２０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(3x^2-6x+2)$　　(2) $\displaystyle\lim_{t\to -3}t(t^2-5)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{3x-1}{(x+2)(x^2+1)}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\sqrt{7-4x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\log_3 x$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan x}$

2．次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2-x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\frac{3x^2-2x-1}{3x+1}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-2x}{x^2-3x+2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3-x^2-x+1}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{12}{x-4}+3\right)$

3．次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{x}$

4．次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x^2-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{1-\frac{4}{(x+2)^2}\right\}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x-3}-1}$

5．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-2\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\left\{-\frac{1}{(x+2)^2}\right\}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x}{(x+1)^2}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left\{3-\frac{1}{(x-2)^2}\right\}$

6．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\sqrt{x-1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to -1+0}\frac{2x+3}{x+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{x^2-3x}{|x|}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to -2-0}\frac{x+2}{|3x+6|}$

7．次の極限を調べよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{(x-1)^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{(x-1)^3}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x-1)^3}$

８. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-5)$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2x^3-1)$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2x^3+x^2-3x)$

９. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-6x+2}{2x^2+1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{x+2}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2+2}$

10. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}3^x$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}3^x$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_4 x$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{4}} x$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to+0}5^{\frac{1}{x}}$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to-0}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{9x^2+4}{x^2}$

11. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-1}{x^2+2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}$

12. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2+1})$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$

13. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x^2}{x^2}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{x}$

14. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\tan x}$

15. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

16. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{2x^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(2x-\pi)^2}$

1．次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}(3x^2-6x+2)$　(2) $\displaystyle\lim_{t\to-3}t(t^2-5)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{3x-1}{(x+2)(x^2+1)}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to1}\sqrt{7-4x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to3}\log_3 x$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan x}$

解答　(1) 2　(2) -12　(3) -2　(4) $\sqrt{3}$　(5) 1　(6) -1

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}(3x^2-6x+2)=3\cdot2^2-6\cdot2+2=2$

(2) $\displaystyle\lim_{t\to-3}t(t^2-5)=-3\{(-3)^2-5\}=-12$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{3x-1}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{3(-1)-1}{(-1+2)\{(-1)^2+1\}}=-2$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to1}\sqrt{7-4x}=\sqrt{7-4\cdot1}=\sqrt{3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to3}\log_3 x=\log_3 3=1$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan x}=\frac{1}{\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=-1$

2．次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2-x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{3x^2-2x-1}{3x+1}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-x^2-2x}{x^2-3x+2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^3-x^2-x+1}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{12}{x-4}+3\right)$

解答　(1) -1　(2) -1　(3) $-\frac{4}{3}$　(4) 6　(5) $\frac{1}{4}$　(6) $-\frac{3}{4}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2-x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-1}=-1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-2)=1-2=-1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{3x^2-2x-1}{3x+1}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{(x-1)(3x+1)}{3x+1}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}(x-1)=-\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-x^2-2x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{x(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x(x+1)}{x-1}=\frac{2(2+1)}{2-1}=6$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x+1)(x-1)^2}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{(-1-1)^2}=\frac{1}{4}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{12}{x-4}+3\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{12+3(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{x(x-4)}=\lim_{x\to0}\frac{3}{x-4}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}$

3．次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{x}$

解答　(1) $\frac{1}{2}$　(2) $\frac{1}{6}$　(3) 4　(4) $\frac{1}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x+8)-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2)-4}=\lim_{x\to2}(\sqrt{x+2}+2)=\sqrt{4}+2=4$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})}{x(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(2x+1)-(x+1)}{x(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$

4．次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x+3}{x^2-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{1-\frac{4}{(x+2)^2}\right\}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x-3}-1}$

解答　(1) -3　(2) 1　(3) 2

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x+3}{x^2-1}=\frac{3}{-1}=-3$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{1-\frac{4}{(x+2)^2}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{(x+2)^2-4}{(x+2)^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{(x+2+2)(x+2-2)}{(x+2)^2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x+4}{(x+2)^2}=\frac{4}{2^2}=1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x-3}-1}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}{(\sqrt{x-3}-1)(\sqrt{x-3}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}{(x-3)-1}=\lim_{x\to4}(\sqrt{x-3}+1)=\sqrt{1}+1=2$

5．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{1}{(x-3)^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-2\right)$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\left\{-\frac{1}{(x+2)^2}\right\}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x}{(x+1)^2}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to2}\left\{3-\frac{1}{(x-2)^2}\right\}$

解答　(1) ∞　(2) ∞　(3) $-\infty$　(4) $-\infty$　(5) $-\infty$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{1}{(x-3)^2}=\infty$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-2\right)=\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\left\{-\frac{1}{(x+2)^2}\right\}=-\infty$

(4) $x\longrightarrow-1$ のとき　$\displaystyle\frac{1}{(x+1)^2}\longrightarrow\infty$　よって　$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x}{(x+1)^2}=-\infty$

(5) $x\longrightarrow2$ のとき　$\displaystyle\frac{1}{(x-2)^2}\longrightarrow\infty$　よって　$\displaystyle\lim_{x\to2}\left\{3-\frac{1}{(x-2)^2}\right\}=-\infty$

6．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{1}{x-2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\sqrt{x-1}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\frac{2x+3}{x+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x^2-3x}{|x|}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-2-0}\frac{x+2}{|3x+6|}$

解答　(1) $-\infty$　(2) 0　(3) ∞　(4) -3　(5) $-\frac{1}{3}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty$　$\displaystyle\left(\frac{1}{-0}=-\infty\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\sqrt{x-1}=0$　$(\sqrt{+0}=\sqrt{0}=0)$

(3) $\displaystyle\frac{2x+3}{x+1}=\frac{1}{x+1}+2$

$x\longrightarrow-1+0$ のとき　$\displaystyle\frac{1}{x+1}\longrightarrow\infty$　よって　$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\frac{2x+3}{x+1}=\lim_{x\to-1+0}\left(\frac{1}{x+1}+2\right)=\infty$

$\displaystyle\left(\frac{2(-1+0)+3}{+0}=\frac{1}{+0}=+\infty\right)$

(4) $x\longrightarrow+0$ であるから　$x>0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x^2-3x}{|x|}=\lim_{x\to+0}\frac{x(x-3)}{x}=\lim_{x\to+0}(x-3)=-3$

(5) $x\longrightarrow-2-0$ であるから　$x<-2$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-2-0}\frac{x+2}{|3x+6|}=\lim_{x\to-2-0}\frac{x+2}{-3(x+2)}=\lim_{x\to-2-0}\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$

7．次の極限を調べよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x}{(x-1)^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x}{(x-1)^3}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x}{(x-1)^3}$

解答　(1) ∞　(2) $-\infty$　(3) 極限はない

解説

(1) $x\longrightarrow1+0$ のとき　$\displaystyle\frac{1}{(x-1)^3}\longrightarrow\infty$，$x\longrightarrow1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x}{(x-1)^3}=\infty$　$\displaystyle\left(\frac{1+0}{(+0)^3}=\frac{1}{+0}=+\infty\right)$

(2) $x\longrightarrow1-0$ のとき　$\displaystyle\frac{1}{(x-1)^3}\longrightarrow-\infty$，$x\longrightarrow1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x}{(x-1)^3}=-\infty$　$\displaystyle\left(\frac{1-0}{(-0)^3}=\frac{1}{-0}=-\infty\right)$

(3) (1)，(2) から，右側極限と左側極限が一致しない。

したがって，$x\longrightarrow1$ のときの極限はない。

8．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-5)$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2x^3-1)$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2x^3+x^2-3x)$

解答　(1) 0　(2) 1　(3) 0　(4) ∞　(5) $-\infty$　(6) $-\infty$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+2}=0$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)=1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x^3}=0$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-5)=\infty$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2x^3-1)=-\infty$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2x^3+x^2-3x)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=-\infty$

9．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-6x+2}{2x^2+1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{x+2}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2+2}$

解答　(1) $\frac{5}{2}$　(2) ∞　(3) 0

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-6x+2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-3+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x^2}}=0$

10. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}3^x$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}3^x$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_4 x$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{4}} x$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to+0}5^{\frac{1}{x}}$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to-0}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{9x^2+4}{x^2}$

解答　(1) ∞　(2) 0　(3) 0　(4) ∞　(5) ∞　(6) $-\infty$　(7) ∞
(8) ∞　(9) 2

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}3^x=\infty$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}3^x=0$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\infty$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_4 x=\infty$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{4}} x=-\infty$

(7) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow +0$ のとき　$t\longrightarrow\infty$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}5^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}5^t=\infty$　　$\left(5^{\frac{1}{+0}}=5^{\infty}=\infty\right)$ と考えてもいい。

(8) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow -0$ のとき　$t\longrightarrow -\infty$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^t=\infty$　　$\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{-0}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-\infty}=(5^{-1})^{-\infty}=5^{\infty}=\infty\right)$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{9x^2+4}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\log_3\left(9+\frac{4}{x^2}\right)=\log_3 9=2$

11. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-1}{x^2+2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}$

解答　(1) $-\infty$　(2) 1　(3) ∞

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-1}{x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=-\infty$

(2) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$t\longrightarrow +0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{3}\right)^t=1$　　$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{\infty}}=\left(\frac{1}{3}\right)^0=1\right)$

(3) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow +0$ のとき　$t\longrightarrow\infty$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}=\lim_{t\to\infty}\log_2 t=\infty$　　$\left(\log_2\frac{1}{+0}=\log_2\infty=\infty\right)$

12. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2+1})$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$

解答　(1) 0　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) -1　(4) -1

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2+1}=(\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2+1})\times\frac{\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2+1}}$

$\displaystyle=\frac{(x^2-2x+2)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{-2x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2+1}}$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2+1})=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2+1}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$

(4) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow -\infty$ のとき　$t\longrightarrow\infty$　　←（大切）

したがって

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-2t}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-2t}-t)(\sqrt{t^2-2t}+t)}{\sqrt{t^2-2t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-2t)-t^2}{\sqrt{t^2-2t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2-2t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{t}}+1}=-1$

13. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x^2}{x^2}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{x}$

解答　(1) 0　(2) 0　(3) 0

解説

(1) $-1\leqq\sin\dfrac{1}{x}\leqq1$ であるから　$-x^2\leqq x^2\sin\dfrac{1}{x}\leqq x^2$

$\displaystyle\lim_{x\to0}(-x^2)=0,\ \lim_{x\to0}x^2=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$

(2) $-1\leqq\cos x^2\leqq1$ であるから，$x\neq0$ のとき　$-\dfrac{1}{x^2}\leqq\dfrac{\cos x^2}{x^2}\leqq\dfrac{1}{x^2}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x^2}{x^2}=0$

(3) $-1\leqq\cos x\leqq1$ であるから　$0\leqq1-\cos x\leqq2$

したがって，$x>0$ のとき　$0\leqq\dfrac{1-\cos x}{x}\leqq\dfrac{2}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}0=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{x}=0$

14. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin3x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\tan x}$

解答　(1) 4　(2) $\dfrac{5}{3}$　(3) 2

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{x}=\lim_{x\to0}4\cdot\frac{\sin4x}{4x}=4\cdot1=4$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{5}{3}\cdot\frac{\sin5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin3x}=\frac{5}{3}\cdot1\cdot1=\frac{5}{3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\tan x}=\lim_{x\to0}2\sin x\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}2\cos^2x=2\times1^2=2$

15. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}$

解答　(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) 4　(3) $\dfrac{9}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x^2\cos x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}$

$\displaystyle=1^2\cdot\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x(1+\cos x)}{\sin^2x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot2(1+\cos x)=1\cdot2(1+1)=4$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos3x)(1+\cos3x)}{x^2(1+\cos3x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^23x}{x^2(1+\cos3x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin^23x}{x^2(1+\cos3x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{9}{1+\cos3x}=1^2\cdot\frac{9}{1+1}=\frac{9}{2}$

16. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{2x^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(2x-\pi)^2}$

解答　(1) $\dfrac{1}{4}$　(2) $\dfrac{1}{8}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{2x^3\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos^2x)}{2x^3\cos x(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin^3x}{2x^3\cos x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\cdot1^3\cdot\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{4}$

(2) $x-\dfrac{\pi}{2}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\theta\longrightarrow0$

したがって

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(2x-\pi)^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{(2\theta)^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{4\theta^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos^2\theta}{4\theta^2(1+\cos\theta)}$

$\displaystyle=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta}{4\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{4(1+\cos\theta)}=1^2\cdot\frac{1}{4(1+1)}=\frac{1}{8}$