数学演習（無限級数）Ｈ２４．１２．４　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１. 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\left(0-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n+1}\right)+\cdots\cdots$

(2) $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}+\cdots\cdots$

(3) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})+(\sqrt{9}-\sqrt{6})+\cdots\cdots+(\sqrt{3(n+1)}-\sqrt{3n})+\cdots\cdots$

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{8}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+2}}+\cdots\cdots$

２. 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}+\cdots\cdots$$

３. 次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $3-\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}-\frac{3}{2^3}+\cdots\cdots$

(2) $5+(-5)+5+(-5)+\cdots\cdots$

(3) $1+\sqrt{3}+3+\cdots\cdots$

(4) $0.1+0.02+0.004+\cdots\cdots$

(5) $2-\sqrt{2}+1-\cdots\cdots$

(6) $(\sqrt{2}-1)+1+(\sqrt{2}+1)+\cdots\cdots$

４. 次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $2\sqrt{3}+(6-2\sqrt{3})+(-12+8\sqrt{3})+\cdots\cdots$

(2) $\sqrt{2}+(3\sqrt{2}-2)+(11\sqrt{2}-12)+\cdots\cdots$

５. 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(1) $1+2x+4x^2+8x^3+\cdots\cdots$

(2) $1+(x^2+x-1)+(x^2+x-1)^2+\cdots\cdots$

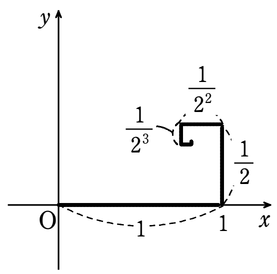
６. 次の循環小数を分数に直せ。

(1) $0.\dot{4}$　(2) $0.\dot{2}\dot{7}$　(3) $0.6\dot{3}$　(4) $0.1\dot{2}3\dot{4}$

７. 無限等比級数 $1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^3}{8}+\cdots\cdots$ が，収束するような x の値の範囲を求めよ。

また，そのときの和を求めよ。

８. 平面上で，点 P が原点 O を出発して x 軸の正の方向に 1 だけ進み，次に y 軸の正の方向に $\dfrac{1}{2}$ だけ進み，次に x 軸の負の方向に $\dfrac{1}{2^2}$ だけ進み，次に y 軸の負の方向に $\dfrac{1}{2^3}$ だけ進む。以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P が近づいていく点の座標を求めよ。



９. 次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{5^{n-1}}\right)$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}-\frac{3}{4^{n-1}}\right)$

10. 次の無限級数の和を求めよ。

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{27}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{81}\right)+\cdots\cdots$$

数学演習（無限級数）Ｈ２４．１２．４

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　）

1．次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\left(0-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n+1}\right)+\cdots\cdots$

(2) $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}+\cdots\cdots$

(3) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})+(\sqrt{9}-\sqrt{6})+\cdots\cdots+(\sqrt{3(n+1)}-\sqrt{3n})+\cdots\cdots$

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{8}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+2}}+\cdots\cdots$

解答　(1)　収束，和 -1　　(2)　収束，和 $\frac{1}{6}$　　(3)　発散　　(4)　発散

第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1) $S_n=\left(0-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n+1}\right)=-\frac{n}{n+1}$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}S_n=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=-1$

よって，この無限級数は収束し，その和は　-1

(2) $\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$ であるから

$S_n=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{6}$

よって，この無限級数は収束し，その和は　$\frac{1}{6}$

(3) $S_n=(\sqrt{6}-\sqrt{3})+(\sqrt{9}-\sqrt{6})+\cdots\cdots+(\sqrt{3(n+1)}-\sqrt{3n})=\sqrt{3(n+1)}-\sqrt{3}$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$

よって，この無限級数は発散する。

(4) $\frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+2}}=\frac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n}}{(\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n})(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})}=\frac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n}}{(2n+2)-2n}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})$ であるから

$S_n=\frac{1}{2}\{(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+\cdots\cdots+(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})\}=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2})$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$

よって，この無限級数は発散する。

2．次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}+\cdots\cdots$$

解答　収束，和 $\frac{1}{4}$

第 n 項までの部分和を S_n とする。

$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$ であるから

$S_n=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right\}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$

よって，この無限級数は収束し，その和は　$\frac{1}{4}$

3．次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $3-\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}-\frac{3}{2^3}+\cdots\cdots$　　(2) $5+(-5)+5+(-5)+\cdots\cdots$

(3) $1+\sqrt{3}+3+\cdots\cdots$　　(4) $0.1+0.02+0.004+\cdots\cdots$

(5) $2-\sqrt{2}+1-\cdots\cdots$　　(6) $(\sqrt{2}-1)+1+(\sqrt{2}+1)+\cdots\cdots$

解答　(1)　収束，和 2　　(2)　発散　　(3)　発散　　(4)　収束，和 0.125
(5)　収束，和 $4-2\sqrt{2}$　　(6)　発散

(1) 初項は 3，公比は $r=-\frac{1}{2}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は　$S=\frac{3}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=2$

(2) 初項は 5，公比は $r=-1$ で　$|r|\geqq1$

よって，この無限等比級数は発散する。

(3) 初項は 1，公比は $r=\sqrt{3}$ で　$|r|\geqq1$

よって，この無限等比級数は発散する。

(4) 初項は 0.1，公比は $r=0.2$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は　$S=\frac{0.1}{1-0.2}=0.125$

(5) 初項は 2，公比は $r=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$S=\frac{2}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

有理化して

$S=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=4-2\sqrt{2}$

(6) 初項は $\sqrt{2}-1$，公比は $r=\sqrt{2}+1$ で　$|r|\geqq1$

よって，この無限等比級数は発散する。

（第２項から第３項を見れば、公比が$\sqrt{2}+1$であることがわかる）

4．次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $2\sqrt{3}+(6-2\sqrt{3})+(-12+8\sqrt{3})+\cdots\cdots$

(2) $\sqrt{2}+(3\sqrt{2}-2)+(11\sqrt{2}-12)+\cdots\cdots$

解答　(1)　収束，和 $6+4\sqrt{3}$　　(2)　発散

(1) 初項は $2\sqrt{3}$，公比は　初項　×　公比　＝　第２項なので
第２項を初項で割れば公比になる。ゆえに

$r=\frac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$S=\frac{2\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3}-1)}=\frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=6+4\sqrt{3}$

(2) 初項は $\sqrt{2}$，公比は $r=\frac{3\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}=3-\sqrt{2}$ で　$|r|\geqq1$

よって，この無限等比級数は発散する。

5．次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(1) $1+2x+4x^2+8x^3+\cdots\cdots$

(2) $1+(x^2+x-1)+(x^2+x-1)^2+\cdots\cdots$

解答　(1)　$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$　　(2)　$-2<x<-1,\ 0<x<1$

(1) 初項は 1，公比は $2x$

ゆえに，この無限等比級数が収束するための条件は　$|2x|<1$

よって　$-1<2x<1$

すなわち　$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

(2) 初項は 1，公比は x^2+x-1

ゆえに，この無限等比級数が収束するための条件は　$|x^2+x-1|<1$

したがって　$-1<x^2+x-1<1$

$-1<x^2+x-1$ から　$x^2+x>0$　　よって　$x<-1,\ 0<x$　……①

$x^2+x-1<1$　から　$x^2+x-2<0$　　よって　$-2<x<1$　……②

①，② の共通範囲をとって　$-2<x<-1,\ 0<x<1$

6. 次の循環小数を分数に直せ。

(1) $0.\dot{4}$　　(2) $0.\dot{2}\dot{7}$　　(3) $0.6\dot{3}$　　(4) $0.1\dot{2}3\dot{4}$

解答　(1) $\dfrac{4}{9}$　(2) $\dfrac{3}{11}$　(3) $\dfrac{19}{30}$　(4) $\dfrac{137}{1110}$

(1) $0.\dot{4}=0.4+0.04+0.004+\cdots\cdots=\dfrac{4}{10}+\dfrac{4}{10^2}+\dfrac{4}{10^3}+\cdots\cdots=\dfrac{\frac{4}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{4}{9}$

(2) $0.\dot{2}\dot{7}=0.27+0.0027+0.000027+\cdots\cdots=\dfrac{27}{10^2}+\dfrac{27}{10^4}+\dfrac{27}{10^6}+\cdots\cdots=\dfrac{\frac{27}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}$

$=\dfrac{27}{99}=\dfrac{3}{11}$

(3) $0.6\dot{3}=0.6+0.03+0.003+0.0003+\cdots\cdots=\dfrac{6}{10}+\dfrac{3}{10^2}+\dfrac{3}{10^3}+\dfrac{3}{10^4}+\cdots\cdots$

$=\dfrac{6}{10}+\dfrac{\frac{3}{10^2}}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{90}=\dfrac{19}{30}$

(4) $0.1\dot{2}3\dot{4}=0.1+0.0234+0.0000234+\cdots\cdots=\dfrac{1}{10}+\dfrac{234}{10^4}+\dfrac{234}{10^7}+\cdots\cdots$

$=\dfrac{1}{10}+\dfrac{\frac{234}{10^4}}{1-\frac{1}{10^3}}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{234}{9990}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{26}{1110}=\dfrac{137}{1110}$

7. 無限等比級数 $1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^3}{8}+\cdots\cdots$ が，収束するような x の値の範囲を求めよ。

また，そのときの和を求めよ。

解答　$-2<x<2$，和 $\dfrac{2}{x+2}$

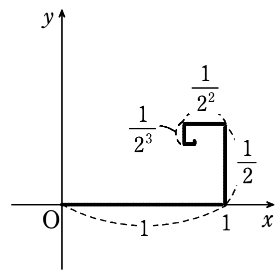
この無限等比級数の初項は 1，公比は $-\dfrac{x}{2}$

ゆえに，この無限等比級数が収束するための条件は　$\left|-\dfrac{x}{2}\right|<1$

よって　$-1<-\dfrac{x}{2}<1$　　すなわち　$-2<x<2$

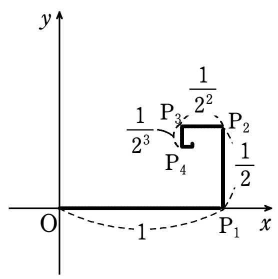
また，このときの和は　$\dfrac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}=\dfrac{2}{x+2}$

8. 平面上で，点 P が原点 O を出発して x 軸の正の方向に 1 だけ進み，次に y 軸の正の方向に $\dfrac{1}{2}$ だけ進み，次に x 軸の負の方向に $\dfrac{1}{2^2}$ だけ進み，次に y 軸の負の方向に $\dfrac{1}{2^3}$ だけ進む。以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P が近づいていく点の座標を求めよ。



解答　$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

O から x 軸の正の方向に 1 だけ進んだ点を P_1，次に y 軸の正の方向に $\dfrac{1}{2}$ だけ進んだ点を P_2，以下順に進んだ点を P_3，P_4，…… とする。



求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=OP_1-P_2P_3+P_4P_5-\cdots\cdots$

$=1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^4}-\cdots\cdots$

これは，初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2^2}$ の無限等比級数であるから，

収束して，その和は　$x=\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{2^2}\right)}=\dfrac{4}{5}$

また　$y=P_1P_2-P_3P_4+P_5P_6-\cdots\cdots=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^5}-\cdots\cdots$

これは，初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $-\dfrac{1}{2^2}$ の無限等比級数であるから，収束して，その和は

$$y=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2^2}\right)}=\frac{2}{5}$$

よって，求める点の座標は　$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

9. 次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{5^{n-1}}\right)$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}-\frac{3}{4^{n-1}}\right)$

解答　(1) $\dfrac{9}{4}$　(2) -3

(1) 無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}}$ の公比は，それぞれ $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{5}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから，これらはともに収束する。

よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$$

(2) 無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^{n-1}}$ の公比は，それぞれ $\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから，これらはともに収束する。

よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=1-4=-3$$

10. 次の無限級数の和を求めよ。

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{27}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{81}\right)+\cdots\cdots$$

解答　$\dfrac{1}{2}$

第 n 項は　$\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{3^n}$

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ の公比は，それぞれ $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから，これらはともに収束する。

よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$