統一テスト（関数・極限）R１．８．２７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 漸近線が 2 直線 $x=3$，$y=2$ である直角双曲線が，点 $(4,\ 3)$ を通るという。この直角双曲線をグラフにもつ分数関数を $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ の形で表せ。

$\boxed{2}$ $S_n=1+2+3+\cdots\cdots+n$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2S_{n+1}}-\sqrt{2S_n}\right)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$\boxed{4}$ 次の無限級数は収束することを示し，その和を求めよ。

$$\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+3)}+\cdots\cdots$$

$\boxed{5}$ 次の極限を求めよ。　$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}$

$\boxed{6}$ 次の 2 つの条件をともに満たす整式で表された関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-3$$

$\boxed{7}$ 関数 $f(x)=\sqrt{7x-3}-1$ について，$f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。不等式 $f^{-1}(x)\leqq f(x)$ を解け。

$\boxed{8}$ 曲線 $y=\sqrt{x+2}$ と直線 $y=x+a$ が共有点をもつとき，定数 a のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{9}$ n は自然数とし， $t>0$ とする。 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+t)^n}=0$ を示せ。

$\boxed{10}$ a と b を $0\leqq a\leqq 1$ ， $0\leqq b<1$ を満たす定数とする。数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$a_1=a$ ， $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n{}^2+b)$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$

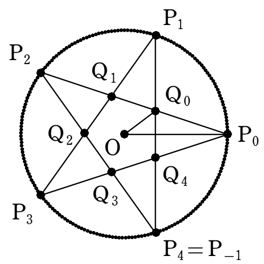
また， $c=1-\sqrt{1-b}$ とおく。以下では，すべての 自然数n に対して $0\leqq a_n\leqq 1$ が成り立つことは使ってよい。

(1) $a_{n+1}-c=\dfrac{1}{2}(a_n+c)(a_n-c)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=c$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{11}$ n を 2 以上の自然数とし，原点 O を中心とする単位円周上に $2n+1$ 個の相異なる点

$\mathrm{P}_k\left(\cos\dfrac{2\pi k}{2n+1},\ \sin\dfrac{2\pi k}{2n+1}\right)$ $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 2n)$ をとる。また整数 j に対して， j を $2n+1$ で割った余りが $k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 2n$ のとき， $\mathrm{P}_j=\mathrm{P}_k$ と約束する。この記法の下で，線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+n}$ と線分 $\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+1-n}$ との交点を Q_k $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 2n)$ とおく。点 P_0， Q_0， P_1， Q_1， $\cdots\cdots$， P_{2n}， Q_{2n}， P_0 を順に結んでできる折れ線が囲む図形を K_n とし，その面積を A_n とする。



$n=2$ のとき

(1) $\angle\mathrm{OP}_0\mathrm{Q}_0$ および $\angle\mathrm{P}_0\mathrm{OQ}_0$ の値を n を用いて表せ。

(2) (1) で求めた $\angle\mathrm{OP}_0\mathrm{Q}_0$ の値を θ_n とおく。 $\triangle\mathrm{OP}_0\mathrm{Q}_0$ の面積を θ_n を用いて表せ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n$ を求めよ。

1 漸近線が2直線 $x=3$，$y=2$ である直角双曲線が，点$(4,\ 3)$を通るという。この直角双曲線をグラフにもつ分数関数を $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ の形で表せ。

解答　$y=\dfrac{2x-5}{x-3}$　⑨

2直線 $x=3$，$y=2$ が漸近線であるから，求める関数は $y=\dfrac{k}{x-3}+2$ $(k\neq 0)$とおける。

グラフが点$(4,\ 3)$を通ることから

$$3=\frac{k}{4-3}+2 \qquad \text{よって}\quad k=1$$

これは $k\neq 0$ を満たす。

したがって　$y=\dfrac{1}{x-3}+2$　⑥

よって，求める関数は　$y=\dfrac{2x-5}{x-3}$

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ とおいたとき，
分数関数だから $c\neq 0$ である

この方法は時間がかかる

2 $S_n=1+2+3+\cdots\cdots+n$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2S_{n+1}}-\sqrt{2S_n})$ を求めよ。

解答　1　⑨

できが悪い

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{2S_{n+1}}-\sqrt{2S_n}$　−1

（かっこが無い）

$S_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$，$S_{n+1}=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$ であるから　③

$$\begin{aligned}\sqrt{2S_{n+1}}-\sqrt{2S_n}&=\sqrt{(n+1)(n+2)}-\sqrt{n(n+1)}\\&=\frac{(n+1)(n+2)-n(n+1)}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+\sqrt{n(n+1)}}\\&=\frac{2(n+1)}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+\sqrt{n(n+1)}}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2S_{n+1}}-\sqrt{2S_n})&=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+\sqrt{n(n+1)}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}+\sqrt{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}}\\&=\frac{2\cdot 1}{1+1}=1\end{aligned}$$

③

3 次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$の極限を求めよ。

$$a_1=1,\quad a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

解答　$\dfrac{5}{2}$　⑨

項数ミス → −3

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とすると　$b_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

数列$\{b_n\}$は数列$\{a_n\}$の階差数列であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\\&=1+\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}=1+\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\end{aligned}$$

⑥

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

4 次の無限級数は収束することを示し，その和を求めよ。

$$\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+3)}+\cdots\cdots$$

解答　$\dfrac{5}{12}$　⑨

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+3)}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\end{aligned}$$

⑥

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12}$

したがって，この無限級数は収束して，その和は $\dfrac{5}{12}$ である。

$-\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}$ を適切にしている者多し

5 次の極限を求めよ。　$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}$

解答　極限はない　⑨

$\displaystyle\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x^2-4}=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x^2-4}=-\infty$

よって片側極限が一致しないので，$x\longrightarrow 2$ のときの極限はない。

片側極限の議論がない
↓
⑤

6 次の2つの条件をともに満たす整式で表された関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-3$$

解答　$f(x)=2x^3+x^2-3x$　⑨

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}$ が存在するから $f(x)-2x^3$ は2次以下の整式である。

よって，$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ とおける。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=a$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$ より　$a=1$　③

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-3$ より　$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0$

分母→0ならば分子→0にならなければならない。

したがって，$f(0)=0$ より　$c=0$　③

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(2x^2+x+b)=b$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-3$ より　$b=-3$　③

したがって　$f(x)=2x^3+x^2-3x$

7 関数 $f(x)=\sqrt{7x-3}-1$ について，$f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。不等式 $f^{-1}(x)\leqq f(x)$ を解け。

$y=\sqrt{7x-3}-1$ において定義域 $x\geqq\frac{3}{7}$，値域 $y\geqq -1$

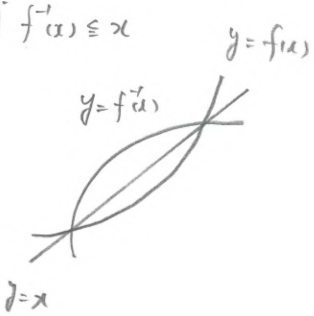
x と y を入れ替えて　$x=\sqrt{7y-3}-1$

y について解いて　$y=\frac{1}{7}\{(x+1)^2+3\}$

よって　逆関数　$f^{-1}(x)=\frac{1}{7}(x^2+2x+4)$　$(x\geqq -1)$　⑤

2つのグラフ $y=f(x)$，$y=f^{-1}(x)$ は直線 $y=x$ に関して対称であるから，

不等式 $f^{-1}(x)\leqq f(x)$ の解は不等式 $f^{-1}(x)\leqq x$ の解に一致する。



$$\frac{1}{7}(x^2+2x+4)\leqq x$$
$$x^2+2x+4\leqq 7x$$
$$(x-1)(x-4)\leqq 0$$
$$1\leqq x\leqq 4$$

⑨

（これらは $f(x)$，$f^{-1}(x)$ のどちらの定義域にも含まれる）

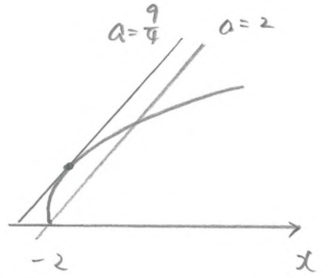
/63

8 曲線 $y=\sqrt{x+2}$ と直線 $y=x+a$ が共有点をもつとき，定数 a のとりうる値の範囲を求めよ。

$y=\sqrt{x+2}$ （定義域 $x\geqq -2$）

と直線 $y=x+a$ が

接するときを考える。



$y'=\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x+2)'=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ より 接線の傾きが

1となるのは $\frac{1}{2\sqrt{x+2}}=1$ より $\sqrt{x+2}=\frac{1}{2}$，$x=-\frac{7}{4}$

直線 $y=x+a$ が 点 $\left(-\frac{7}{4},\frac{1}{2}\right)$ を通るとき，$a=\frac{9}{4}$ 5

以上より

$a\leqq\frac{9}{4}$ 9

接点の議論もして欲しい

9 n は自然数とし，$t>0$ とする。$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(1+t)^n}=0$ を示せ。

強さの不等号を示す問題なのに＝が入ってしまっている解答多し

2項定理と $t>0$ より $n\geqq 2$ のとき

$$0<\frac{n}{(1+t)^n}\leqq\frac{n}{1+{}_nC_1t+{}_nC_2t^2}$$ 5

が成り立つ。よって

$$0<\frac{n}{(1+t)^n}\leqq\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}t+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)t^2}$$

$n\to\infty$ のとき $\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}t+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)t^2}\to 0$

はさみうちの原理より $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(1+t)^n}=0$ 9

10 a と b を $0\leqq a\leqq 1$，$0\leqq b<1$ を満たす定数とする。数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$a_1=a$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n{}^2+b)$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$

また，$c=1-\sqrt{1-b}$ とおく。

~~(1) $0\leqq a_n\leqq 1$ が成り立つことを示せ。~~

(1) ~~(2)~~ $a_{n+1}-c=\frac{1}{2}(a_n+c)(a_n-c)$ が成り立つことを示せ。 3

(2) ~~(3)~~ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$ が成り立つことを示せ。 6

(1)

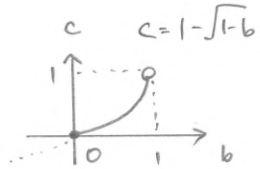
$c=1-\sqrt{1-b}$ より $b=1-(c-1)^2=2c-c^2$

$$\begin{aligned}a_{n+1}-c&=\frac{1}{2}(a_n^2+b)-c\\&=\frac{1}{2}(a_n^2+2c-c^2-2c)\\&=\frac{1}{2}(a_n^2-c^2)=\frac{1}{2}(a_n+c)(a_n-c)\end{aligned}$$

(2) すべての n について $0\leqq a_n\leqq 1$，

また $0\leqq b<1$ よりグラフから

$0\leqq c<1$ が成り立つ。 2



よって $0\leqq\frac{1}{2}(a_n+c)\leqq\frac{1}{2}(1+c)<1$

が成り立つので

これが出てこない答案が多い

$|a_{n+1}-c|\leqq\frac{1}{2}(1+c)|a_n-c|$

$\left\{\frac{1}{2}(a_n+c)\right\}^n$ などのまちがい多し

この不等式を繰り返し用いることで

$0\leqq|a_n-c|\leqq\left\{\frac{1}{2}(1+c)\right\}^{n-1}|a_1-c|$ 2

が成り立つ。$0<\frac{1}{2}(1+c)<1$ より

$n\to\infty$ のとき $\left\{\frac{1}{2}(1+c)\right\}^{n-1}|a_1-c|\to 0$

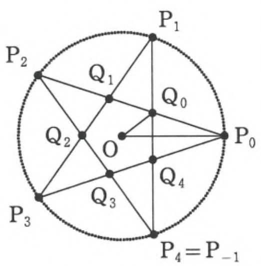
はさみうちの原理から

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-c|=0$ つまり $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$

11 n を2以上の自然数とし，原点Oを中心とする単位円周上に $2n+1$ 個の相異なる点

大阪大

$P_k\left(\cos\frac{2\pi k}{2n+1},\ \sin\frac{2\pi k}{2n+1}\right)$ $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 2n)$ をとる。また整数 j に対して，j を $2n+1$ で割った余りが $k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 2n$ のとき，$P_j=P_k$ と約束する。この記法の下で，線分 P_kP_{k+n} と線分 $P_{k+1}P_{k+1-n}$ との交点を Q_k $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 2n)$ とおく。点 P_0，Q_0，P_1，Q_1，$\cdots\cdots$，P_{2n}，Q_{2n}，P_0 を順に結んでできる折れ線が囲む図形を K_n とし，その面積を A_n とする。



$n=2$ のとき

(1) $\angle OP_0Q_0$ および $\angle P_0OQ_0$ の値を n を用いて表せ。

(2) (1)で求めた $\angle OP_0Q_0$ の値を θ_n とおく。$\triangle OP_0Q_0$ の面積を θ_n を用いて表せ。

(3) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ を求めよ。

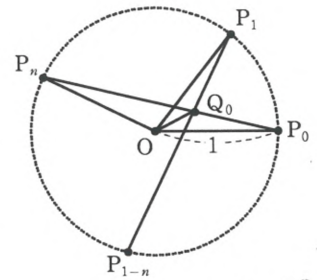
解答 (1) $\angle OP_0Q_0=\frac{\pi}{2(2n+1)}$， 2 $\angle P_0OQ_0=\frac{\pi}{2n+1}$ 2 (2) $\frac{\sin\theta_n\sin 2\theta_n}{2\sin 3\theta_n}$ 3

(3) $\frac{\pi}{3}$ 3

(1) 点 P_k のとり方から $\angle P_0OP_n=\frac{2\pi n}{2n+1}$

$\triangle P_0OP_n$ は $OP_0=OP_n$ の二等辺三角形であるから

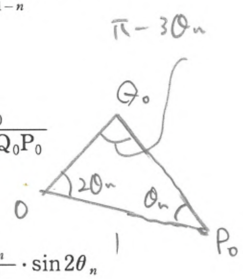
$$\angle OP_0Q_0=\frac{1}{2}(\pi-\angle P_0OP_n)=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{2\pi n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2(2n+1)}$$



また，$P_0P_n=P_1P_{1-n}$ であるから，図形の対称性により

$$\angle P_0OQ_0=\frac{1}{2}\angle P_0OP_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{2n+1}=\frac{\pi}{2n+1}$$

(2) $\angle OP_0Q_0=\theta_n$ とおくと，(1)より $\angle P_0OQ_0=2\theta_n$



$\triangle OP_0Q_0$ において正弦定理により $\frac{OQ_0}{\sin\angle OP_0Q_0}=\frac{OP_0}{\sin\angle OQ_0P_0}$

よって $OQ_0=\frac{1}{\sin(\pi-3\theta_n)}\cdot\sin\theta_n=\frac{\sin\theta_n}{\sin 3\theta_n}$

ゆえに $\triangle OP_0Q_0=\frac{1}{2}\cdot OP_0\cdot OQ_0\sin\angle P_0OQ_0=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sin\theta_n}{\sin 3\theta_n}\cdot\sin 2\theta_n$

$$=\frac{\sin\theta_n\sin 2\theta_n}{2\sin 3\theta_n}$$

(3) K_n は $\triangle OP_0Q_0$ を $2(2n+1)$ 個合わせた図形とみることができるから

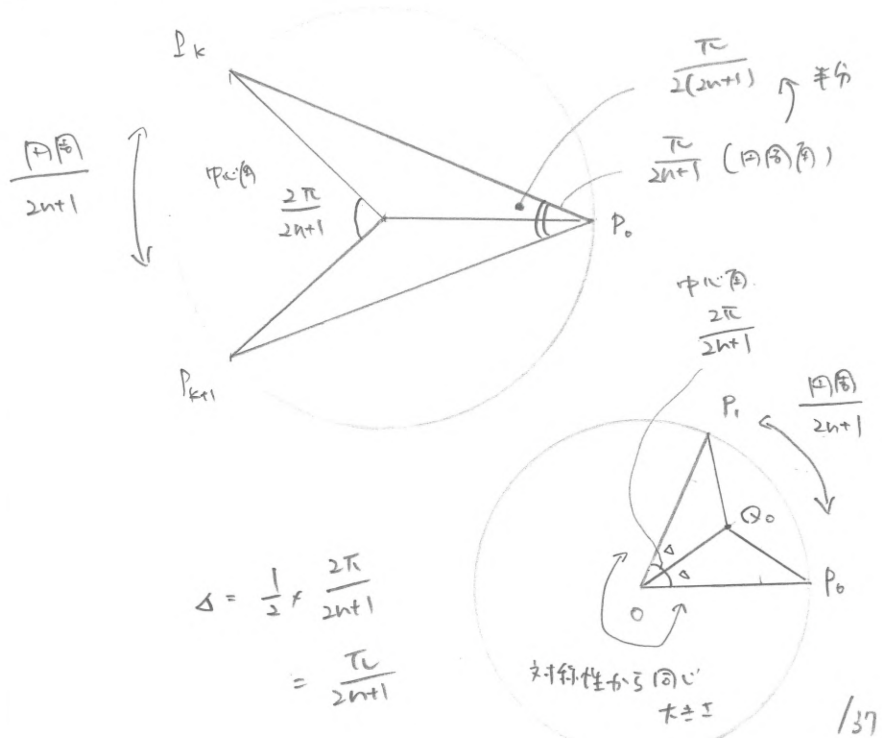
$$A_n=2(2n+1)\cdot\triangle OP_0Q_0=2(2n+1)\cdot\frac{\sin\theta_n\sin 2\theta_n}{2\sin 3\theta_n}$$

$$=2(2n+1)\cdot\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\cdot\frac{\sin 2\theta_n}{2\theta_n}\cdot\frac{3\theta_n}{\sin 3\theta_n}\cdot\frac{\theta_n}{3}$$

$\theta_n=\frac{\pi}{2(2n+1)}$ より $A_n=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\cdot\frac{\sin 2\theta_n}{2\theta_n}\cdot\frac{3\theta_n}{\sin 3\theta_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=0$ であるから $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\cdot\frac{\sin 2\theta_n}{2\theta_n}\cdot\frac{3\theta_n}{\sin 3\theta_n}=\frac{\pi}{3}$

(2n+1)等分されてる



/37