

- 1 次の2つの関数のグラフの共有点の座標を求めよ。

$$y = \frac{4x}{2x-1}, y = 2x$$

- 2 グラフを利用して、次の不等式を解け。

$$\frac{4x}{2x-1} \geq 2x$$

- 3 次の関数のグラフをかき、その値域を求めよ。

$$(1) y = \sqrt{x+4} - 1$$

$$(2) y = -\sqrt{1-2x} + 2$$

- 4 次の各組において、2つの関数のグラフの共有点の座標を求めよ。

$$(1) y = \sqrt{x+1}, y = x-1$$

$$(2) y = \sqrt{2x+1}, y = \frac{1}{2}x + 1$$

- 5 関数 $f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。次の条件を満たす定数 a, b の値を求めよ。

$$(1) f(x) = ax + b \text{ について, } f^{-1}(5) = 4, f^{-1}(-5) = -1 \text{ である。}$$

$$(2) f(x) = a \cdot 2^x + b \text{ について, } f(2) = 11, f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \text{ である。}$$

- 6 次の関数の逆関数を求めよ。

$$(1) y = \frac{x-1}{x-2}$$

$$(2) y = \frac{2x+1}{x+1} \quad (x \geq 0)$$

- 7 関数 $f(x) = 2x-1, g(x) = x^2+3x$ について、次の合成関数を求めよ。

$$(1) (f \circ g)(x)$$

$$(2) (f \circ f)(x)$$

8 次の数列の極限値をいえ。

(1) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{2n-1}{2n}, \dots$

(2) $\sin \pi, \sin 2\pi, \sin 3\pi, \dots, \sin n\pi, \dots$

9 第 n 項が次の式で表される数列について、その極限を調べよ。

(1) $3n-2$

(2) $\frac{1}{n^2}$

(3) $2-(-1)^n$

10 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{4}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

11 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-3}{2n+1}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-7}{n^2+1}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right)$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-3}{n^2+4}$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n} + \sqrt{n+1}}$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$

(7) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$

12 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{3^n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{3^n + 2^n}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n - 3^n}{(-3)^n + 2^n}$

13 次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^{n-1}} \right)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3^n} - \frac{3}{4^{n-1}} \right)$

1 次の2つの関数のグラフの共有点の座標を求めよ。

$y = \frac{4x}{2x-1}, y = 2x$

2つの関数のグラフの共有点のx座標は、次の

等式を満たす。 $\frac{4x}{2x-1} = 2x \dots\dots ①$

①の両辺に $2x-1$ を掛けて $4x = 2x(2x-1)$

整理すると $2x^2 - 3x = 0$

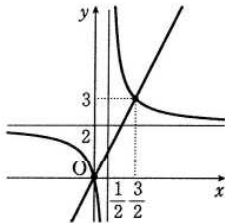
これを解いて $x = 0, \frac{3}{2}$

これらは、①の左辺の分母を0にしないから、①の解である。

共有点は直線 $y = 2x$ 上にあるから

$x = 0$ のとき $y = 0, x = \frac{3}{2}$ のとき $y = 3$

よって、共有点の座標は $(0, 0), (\frac{3}{2}, 3)$



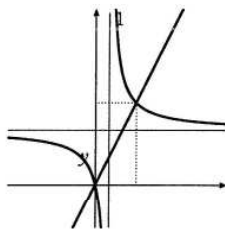
2 グラフを利用して、次の不等式を解け。

$\frac{4x}{2x-1} \geq 2x$

求める解は、双曲線 $y = \frac{4x}{2x-1}$ が直線 $y = 2x$

より上側にあるか、または共有点をもつようなxの値の範囲である。

よって、グラフから $x \leq 0, \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$

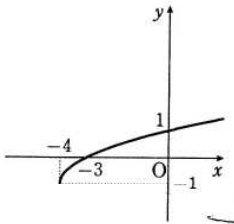


3 次の関数のグラフをかき、その値域を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x+4} - 1$

(2) $y = -\sqrt{1-2x} + 2$

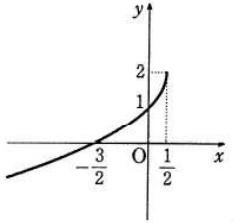
(1) $y = \sqrt{x}$ のグラフをx軸方向に-4, y軸方向に-1だけ平行移動したもので、[図]のようになる。グラフから、値域は $y \geq -1$



(2) $-\sqrt{1-2x} + 2 = -\sqrt{-2(x-\frac{1}{2})} + 2$

よって、 $y = -\sqrt{1-2x} + 2$ のグラフは、

$y = -\sqrt{-2x}$ のグラフをx軸方向に1/2, y軸方向に2だけ平行移動したもので、[図]のようになる。グラフから、値域は $y \leq 2$



4 次の各組において、2つの関数のグラフの共有点の座標を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x+1}, y = x-1$

(2) $y = \sqrt{2x+1}, y = \frac{1}{2}x+1$

(1) 共有点のx座標は、
方程式 $\sqrt{x+1} = x-1 \dots\dots ①$ の解である。

両辺を平方して $x+1 = (x-1)^2$

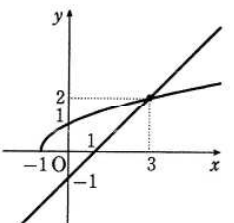
整理すると $x^2 - 3x = 0$

したがって $x = 0, 3$

①を満たすのは $x = 3$

また $x = 3$ のとき $y = 2$

よって、共有点の座標は $(3, 2)$



(2) 共有点のx座標は、

方程式 $\sqrt{2x+1} = \frac{1}{2}x+1 \dots\dots ①$ の解である。

両辺を平方して $2x+1 = (\frac{1}{2}x+1)^2$

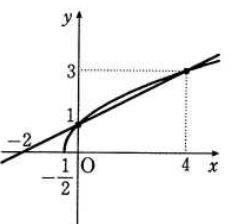
整理すると $x^2 - 4x = 0$

したがって $x = 0, 4$

$x = 0, 4$ はともに①を満たす。

$x = 0$ のとき $y = 1, x = 4$ のとき $y = 3$

よって、共有点の座標は $(0, 1), (4, 3)$



5 関数 $f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。次の条件を満たす定数 a, b の値を求めよ。

(1) $f(x) = ax+b$ について、 $f^{-1}(5) = 4, f^{-1}(-5) = -1$ である。

(2) $f(x) = a \cdot 2^x + b$ について、 $f(2) = 11, f^{-1}(\frac{1}{2}) = -1$ である。

(1) $f^{-1}(5) = 4$ から $f(4) = 5$

ゆえに $4a+b=5 \dots\dots ①$

また、 $f^{-1}(-5) = -1$ から $f(-1) = -5$

よって $-a+b=-5 \dots\dots ②$

①, ②を解いて $a=2, b=-3$

(2) $f(2) = 11$ から $4a+b-11 \dots\dots ①$

また、 $f^{-1}(\frac{1}{2}) = -1$ から $f(-1) = \frac{1}{2}$

ゆえに $\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{2} \dots\dots ②$

①, ②を解いて $a=3, b=-1$

6 次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y = \frac{x-1}{x-2}$

(2) $y = \frac{2x+1}{x+1} (x \geq 0)$

(1) $\frac{x-1}{x-2} = \frac{(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 1$

よって、関数 $y = \frac{x+1}{x-2}$ の値域は $y \neq 1$

$y = \frac{x-1}{x-2}$ の両辺に $x-2$ を掛けて $(x-2)y = x-1$

ゆえに $(y-1)x = 2y-1$

$y \neq 1$ であるから $x = \frac{2y-1}{y-1}$

よって、求める逆関数は $y = \frac{2x-1}{x-1}$

(2) $\frac{2x+1}{x+1} = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 2$

よって、 $y = \frac{2x+1}{x+1} (x \geq 0)$ のグラフは、図のようになり、値域は $1 \leq y < 2$

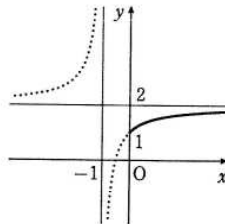
$y = \frac{2x+1}{x+1}$ の両辺に $x+1$ を掛けて

$(x+1)y = 2x+1$

ゆえに $(y-2)x = -y+1$

$y \neq 2$ であるから $x = \frac{-y+1}{y-2}$

よって、求める逆関数は $y = \frac{-x+1}{x-2} (1 \leq x < 2)$



7 関数 $f(x) = 2x-1, g(x) = x^2+3x$ について、次の合成関数を求めよ。

(1) $(f \circ g)(x)$

(2) $(f \circ f)(x)$

(1) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+3x) = 2(x^2+3x)-1 = 2x^2+6x-1$

(2) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x-1) = 2(2x-1)-1 = 4x-3$

8 次の数列の極限値をいえ。

- (1) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{2n-1}{2n}, \dots$
 (2) $\sin \pi, \sin 2\pi, \sin 3\pi, \dots, \sin n\pi, \dots$

(1) $\frac{2n-1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n}$ で, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 1$

(2) n が自然数のとき, $\sin n\pi = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$

9 第 n 項が次の式で表される数列について, その極限を調べよ。

- (1) $3n-2$ (2) $\frac{1}{n^2}$ (3) $2-(-1)^n$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n-2) = \infty$ であるから, ∞ に発散。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ であるから, 0 に収束。

(3) $a_n = 2 - (-1)^n$ とおくと, $n \rightarrow \infty$ のとき $a_{2n} \rightarrow 1$ $a_{2n-1} \rightarrow 3$
 よって, 振動する。

10 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{4}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

(1) $-1 \leq \cos \frac{n\pi}{4} \leq 1$ であるから $-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{4} \leq \frac{1}{n}$

ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{4} = 0$

(2) $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ であるから $-\frac{1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n+1}\right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$

11 次の極限を求めよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-3}{2n+1}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-7}{n^2+1}$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right)$
 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-3}{n^2+4}$ (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n} + \sqrt{n+1}}$ (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$
 (7) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-3}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{3}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{5-0}{2+0} = \frac{5}{2}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-7}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{0-0}{1+0} = 0$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{-1}{1+0} = -1$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-3}{n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3}{n^2} - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} = \infty$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = 2 - \sqrt{2}$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3) - n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = 0$

(7) $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} = \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}}$
 $= \frac{(n^2+n) - (n^2-n)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}}$ であるから
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{2}{1+1} = 1$

12 次の極限を求めよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{3^n}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{3^n + 2^n}$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n - 3^n}{(-3)^n + 2^n}$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{5}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} = \infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{3^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{0-1}{1+0} = -1$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n - 3^n}{(-3)^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - (-1)^n}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \left\{ \left(-\frac{2}{3}\right)^n - 1 \right\}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}$

$n \rightarrow \infty$ のとき, $\left(-\frac{2}{3}\right)^n - 1 \rightarrow -1$, $1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 1$ であるが, $(-1)^n$ は振動する。
 よって, 極限はない。

13 次の無限級数の和を求めよ。

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^{n-1}} \right)$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3^n} - \frac{3}{4^{n-1}} \right)$

(1) 無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}}$ の公比は, それぞれ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから, これらはともに収束する。

よって, 求める和 S は

$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$

(2) 無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}}$ の公比は, それぞれ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから, これらはともに収束する。

よって, 求める和 S は

$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 1 - 4 = -3$