数学演習（数列の極限）Ｈ２４．１２．４　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１. 第 n 項が次の式で表される数列について，その極限を調べよ。

(1) $3n-2$　(2) $-4n+9$　(3) n^3+1　(4) $2n(1-n)$

(5) $\dfrac{1}{n^2}$　(6) $\dfrac{3}{2^n}$　(7) $2-(-1)^n$　(8) $\cos n\pi$

２. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{2n+1}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3}{3n^2-n+1}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-7}{n^2+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{n^3-6n+1}$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$

３. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2-n+1)$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5n-n^3)$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{n^2+4}$

４. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2-2)}{1-2n^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2(1-5n)}$

５. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n-1}}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}+\sqrt{n+1}}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+\sqrt{n^2+3n}}$

６. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2})$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}$

７. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

8．第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $\left(\dfrac{6}{5}\right)^n$　(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$　(3) $\left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$　(4) $4\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$

9．数列 $\{(3x)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

10. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{3^n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{5^n+3^n}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{3^n+2^n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n}{4^n-(-3)^n}$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n-3^n}{(-3)^n+2^n}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(8^n-9^n)$　(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{(-2)^n+2^{2n}\}$

11. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot2^n+5}{2^n+3}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n)$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n}{2^n-1}$

12. 次の数列の極限を，$|r|<1$，$r=1$，$|r|>1$ の各場合について求めよ。

(1) $\left\{\dfrac{1+r-r^n}{2+r^n}\right\}$　(2) $\left\{\dfrac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}\right\}$

13. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項とその極限を求めよ。

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n+1$

(2) $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+3$

１． 第 n 項が次の式で表される数列について，その極限を調べよ。

(1) $3n-2$　(2) $-4n+9$　(3) n^3+1　(4) $2n(1-n)$

(5) $\dfrac{1}{n^2}$　(6) $\dfrac{3}{2^n}$　(7) $2-(-1)^n$　(8) $\cos n\pi$

解答　(1) ∞ に発散　(2) $-\infty$ に発散　(3) ∞ に発散　(4) $-\infty$ に発散
　(5) 0 に収束　(6) 0 に収束　(7) 振動する　(8) 振動する

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n-2)=\lim_{n\to\infty}n\left(3-\frac{2}{n}\right)=\infty$ であるから，∞ に発散。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-4n+9)=\lim_{n\to\infty}n\left(-4+\frac{9}{n}\right)=-\infty$

よって，$-\infty$ に発散。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3+1)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)=\infty$ であるから，∞ に発散。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2n(1-n)=\lim_{n\to\infty}2n^2\left(\frac{1}{n}-1\right)=-\infty$

別解　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2n=\infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-n)=-\infty$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2n(1-n)=-\infty$

よって，$-\infty$ に発散。

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ であるから，0 に収束。

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2^n}=0$ であるから，0 に収束。

(7) $a_n=2-(-1)^n$ とおくと，3, 1, 3, 1, 3, 1, 3 …… となって

奇数番目は 3，偶数番目は 1　となる。よって，振動する。

(8) $-1, 1, -1, 1, -1, \cdots\cdots$　となるので，振動する。

２． 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{2n+1}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3}{3n^2-n+1}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-7}{n^2+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{n^3-6n+1}$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$

解答　(1) $\dfrac{5}{2}$　(2) $\dfrac{4}{3}$　(3) 0　(4) 0　(5) -1

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n}{n}-\frac{3}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{5-0}{2+0}=\frac{5}{2}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3}{3n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2}{n^2}-\frac{3}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{4-0}{3-0+0}=\frac{4}{3}$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-7}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n^2}-\frac{7}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0-0}{1+0}=0$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{n^3-6n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+6}{n^3-6n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^3}+\frac{5n}{n^3}+\frac{6}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}-\frac{6n}{n^3}+\frac{1}{n^3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}}{1-\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=\frac{0+0+0}{1-0+0}=0$$

(5) $$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n(n+1)}$$　（約分して）

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-n}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{-1}{1+0}=-1$$

３． 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2-n+1)$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5n-n^3)$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{n^2+4}$

解答　(1) ∞　(2) $-\infty$　(3) ∞

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2-n+1)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5n-n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{5}{n^2}-1\right)=-\infty$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3}{n^2}-\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}=\infty$$　（$\dfrac{\infty-0}{1+0}=\dfrac{\infty}{1}$　より）

４． 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2-2)}{1-2n^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2(1-5n)}$

解答　(1) $-\dfrac{1}{2}$　(2) 0

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2-2)}{1-2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2-2n-2}{1-2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^3}-2}$$

$$=\frac{1+0-0-0}{0-2}=-\frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2(1-5n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2-5n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}-5}=\frac{0+0-0}{0-5}=0$$

５． 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n-1}}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}+\sqrt{n+1}}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+\sqrt{n^2+3n}}$

解答　(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $2-\sqrt{2}$　(3) $\dfrac{3}{2}$

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{4n-1}}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{4-0}}=\frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=2-\sqrt{2}$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+\sqrt{n^2+3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{\sqrt{n^2+3n}}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{1+\sqrt{\frac{n^2+3n}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

６． 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2})$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}$

解答　(1) 0　(2) 0　(3) ∞

(1) $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=0$$

参考　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$ において　$\dfrac{3}{\infty+\infty}=\dfrac{3}{\infty}=0$

としても良い。

(2) $$\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}=\frac{(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2})(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2})}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}$$

$$=\frac{(n^2+2)-(n^2-2)}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}=\frac{4}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}$$ であるから

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+2}}{n}+\frac{\sqrt{n^2-2}}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+2}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2-2}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}}$$

$$=\frac{0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=0$$

参考　$\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}$　の段階において　$\dfrac{4}{\infty+\infty}=\dfrac{4}{\infty}=0$

としても良い。

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{(n+2)-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{3}=\infty$$

7. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

解答 (1) 0　(2) 0

(1) $-1\leqq\cos\frac{n\pi}{4}\leqq1$ であるから　$-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}\leqq\frac{1}{n}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}=0$

(2) $-1\leqq(-1)^n\leqq1$ であるから　$-\frac{1}{n+1}\leqq\frac{(-1)^n}{n+1}\leqq\frac{1}{n+1}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=0$

8. 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $\left(\frac{6}{5}\right)^n$　(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^n$　(3) $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$　(4) $4\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

解答 (1) ∞　(2) 0　(3) 極限はない　(4) 0

(1) $\frac{6}{5}>1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{5}\right)^n=\infty$

よって，∞ に発散する。

(2) $\left|\frac{1}{3}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

よって，0 に収束する。

(3) $-\frac{4}{3}\leqq-1$ であるから，振動する。

すなわち，極限はない。

(4) 公比は $-\frac{3}{5}$ で $\left|-\frac{3}{5}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}=0$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{4\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}=4\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}=0$

よって，0 に収束する。

9. 数列 $\{(3x)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

解答 $-\frac{1}{3}<x\leqq\frac{1}{3}$；極限値は，$-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ のとき 0，$x=\frac{1}{3}$ のとき 1

与えられた数列が収束するための必要十分条件は　$-1<3x\leqq1$

すなわち　$-\frac{1}{3}<x\leqq\frac{1}{3}$

極限値は　$-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3x)^n=0$，

$x=\frac{1}{3}$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3x)^n=1$

10. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{3^n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{5^n+3^n}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{3^n+2^n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n}{4^n-(-3)^n}$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n-3^n}{(-3)^n+2^n}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(8^n-9^n)$　(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{(-2)^n+2^{2n}\}$

解答 (1) ∞　(2) 0　(3) -1　(4) 0　(5) 振動する　(6) $-\infty$　(7) ∞

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n}{3^n}-\frac{2^n}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=\infty$　（$\left(\frac{5}{3}\right)^n\to\infty$のため）

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{5^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^n}{5^n}}{\frac{5^n}{5^n}+\frac{3^n}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{0}{1+0}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{3^n}-\frac{3^n}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{0-1}{1+0}=-1$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n}{4^n-(-3)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-2)^n}{4^n}}{\frac{4^n}{4^n}-\frac{(-3)^n}{4^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{4}\right)^n}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{0}{1-0}=0$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n-3^n}{(-3)^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-2)^n}{(-3)^n}-\frac{3^n}{(-3)^n}}{\frac{(-3)^n}{(-3)^n}+\frac{2^n}{(-3)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-(-1)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$

$n\longrightarrow\infty$ のとき，分母は$\left(-\frac{2}{3}\right)^n-1\longrightarrow-1$，分子について$\left(\frac{2}{3}\right)^n\to0$

であるが，$(-1)^n$ は振動する。

よって，振動する。

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(8^n-9^n)=\lim_{n\to\infty}9^n\left(\frac{8^n}{9^n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}9^n\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^n-1\right\}=-\infty$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{(-2)^n+2^{2n}\}=\lim_{n\to\infty}2^{2n}\left\{\frac{(-2)^n}{2^{2n}}+1\right\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}2^{2n}\left\{\frac{(-2)^n}{4^n}+1\right\}=\lim_{n\to\infty}2^{2n}\left\{\left(-\frac{2}{4}\right)^n+1\right\}=\infty$　（$2^{2n}\to\infty$　より）

11. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot2^n+5}{2^n+3}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n)$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n}{2^n-1}$

解答 (1) 3　(2) ∞　(3) 極限はない

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot2^n+5}{2^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{2^n}}{1+\frac{3}{2^n}}=\frac{3+0}{1+0}=3$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n)=\lim_{n\to\infty}5^n\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}=\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n}{2^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$n\longrightarrow\infty$ のとき，$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\longrightarrow1$ であるが，$\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ は振動する。

よって，極限はない。

12. 次の数列の極限を，$|r|<1$，$r=1$，$|r|>1$ の各場合について求めよ。

(1) $\left\{\frac{1+r-r^n}{2+r^n}\right\}$　(2) $\left\{\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}\right\}$

解答 (1) $|r|<1$ のとき $\frac{1+r}{2}$，$r=1$ のとき $\frac{1}{3}$，$|r|>1$ のとき -1

(2) $|r|<1$ のとき 0，$r=1$ のとき $\frac{2}{3}$，$|r|>1$ のとき 1

(1) [1] $|r|<1$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+r-r^n}{2+r^n}=\frac{1+r-0}{2+0}=\frac{1+r}{2}$

[2] $r=1$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+r-r^n}{2+r^n}=\frac{1+1-1}{2+1}=\frac{1}{3}$

[3] $|r|>1$ のとき

$\left|\frac{1}{r}\right|<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+r-r^n}{2+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}+\frac{r}{r^n}-\frac{r^n}{r^n}}{\frac{2}{r^n}+\frac{r^n}{r^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}+\frac{1}{r^{n-1}}+1}{\frac{2}{r^n}+1}=\frac{0+0-1}{0+1}=-1$$

(2) [1] $|r|<1$のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\frac{0+0}{0+2}=0$

[2] $r=1$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$

[3] $|r|>1$　のとき

$\left|\frac{1}{r}\right|<1$，$\left|\frac{1}{r^2}\right|<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{2n}}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{r^{2n}}{r^{2n}}+\frac{r^n}{r^{2n}}}{\frac{r^{2n}}{r^{2n}}+\frac{2}{r^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{r^n}}{1+\frac{2}{r^{2n}}}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

13. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項とその極限を求めよ。

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+1$

(2) $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+3$

解答 (1) $a_n=-3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+4$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=4$　(2) $a_n=5\cdot2^{n-1}-3$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

(1) 漸化式を変形すると　$a_{n+1}-4=\frac{3}{4}(a_n-4)$

また　$a_1-4=-3$

よって，数列 $\{a_n-4\}$ は初項 -3，公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列であるから

$a_n-4=-3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

ゆえに　$a_n=-3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+4$　したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=4$

(2) 漸化式を変形すると　$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$

また　$a_1+3=5$

よって，数列 $\{a_n+3\}$ は初項 5，公比 2 の等比数列であるから

$a_n+3=5\cdot2^{n-1}$

ゆえに　$a_n=5\cdot2^{n-1}-3$　したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$