数学演習（極限）Ｈ２４．５．１７　　　　(　)組(　)番　名前(　　　　)

１．次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(5n-n^3)$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^3-3}{n^2+4}$

２．次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+1}\sin^2\dfrac{n\pi}{6}$

３．次の極限を求めよ。　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot5+2\cdot8+3\cdot11+\cdots\cdots+n(3n+2)}{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}$

４．数列 $\{(3x)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

５．関数 $y=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ のグラフをかけ。

６．次の無限級数の和を求めよ。

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{27}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{81}\right)+\cdots\cdots$$

７．$|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ である。このことを利用して，無限級数

$1-\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{8}+\dfrac{5}{16}-\cdots\cdots$ の和を求めよ。

８．次の無限級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，その和を $f(x)$ とするとき，関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。$x+x(1-2x^2)+x(1-2x^2)^2+x(1-2x^2)^3+\cdots\cdots$

９. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-1}{x^2+2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x^2-x+1)-\log_2(x^2+2)\}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}$

10. 次の極限値を求めよ。　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}$

11. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-x^2-2x}{x^2-3x+2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to3+0}\frac{x^2+x-12}{|x-3|}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x}{(x-1)^3}$

12. 関数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{ax+3}-1}{x-2}$ が $x\longrightarrow2$ のとき収束するように，定数 a の値を定めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

13. 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-ax-b)=3$$

14. 関数 $f(x)=[\cos x]$ が，$x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続であるか不連続であるかを調べよ。

数学演習（極限）Ｈ２４．５．１７　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5n-n^3)$　　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{n^2+4}$

解答　(1) $-\infty$　(2) ∞

解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5n-n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{5}{n^2}-1\right)=-\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}=\infty$

2．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$　　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}\sin^2\frac{n\pi}{6}$

解答　(1) 1　(2) 0

解説

(1) $\displaystyle\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}=\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$

$\displaystyle=\frac{(n^2+n)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{1+1}=1$

(2) $\displaystyle 0\leqq\sin^2\frac{n\pi}{6}\leqq1$ であるから　$\displaystyle 0\leqq\frac{1}{n^2+1}\sin^2\frac{n\pi}{6}\leqq\frac{1}{n^2+1}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}0=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}\sin^2\frac{n\pi}{6}=0$

3．次の極限を求めよ。　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot5+2\cdot8+3\cdot11+\cdots\cdots+n(3n+2)}{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}$

解答　3

解説

$\displaystyle(\text{分子})=\sum_{k=1}^{n}k(3k+2)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+3)$

$\displaystyle(\text{分母})=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

したがって

$\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)(2n+3)}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(2n+3)}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(2+\frac{3}{n}\right)}{2+\frac{1}{n}}=3$

4．数列 $\{(3x)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

解答　$-\frac{1}{3}<x\leqq\frac{1}{3}$；極限値は，$-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ のとき 0，$x=\frac{1}{3}$ のとき 1

解説

与えられた数列が収束するための必要十分条件は　$-1<3x\leqq1$

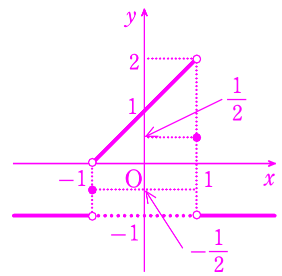
すなわち　$-\frac{1}{3}<x\leqq\frac{1}{3}$

極限値は　$-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3x)^n=0$，

$x=\frac{1}{3}$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3x)^n=1$

5．関数 $\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ のグラフをかけ。

解答



解説

$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}$

[1]　$|x|<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$ であるから　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{1+x-0}{1+0}=x+1$

[2]　$x=1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$ であるから　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{1+1-1}{1+1}=\frac{1}{2}$

[3]　$x=-1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$ であるから　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{1-1-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$

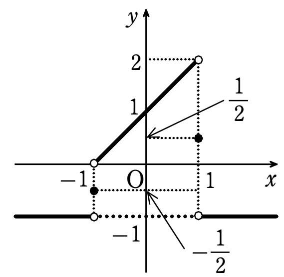
[4]　$|x|>1$ のとき　$\left|\frac{1}{x}\right|<1$ より，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n-1}}=0$ であるから

$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}+\frac{1}{x^{2n-1}}-1}{\frac{1}{x^{2n}}+1}$

$\displaystyle=\frac{0+0-1}{0+1}=-1$

以上から，グラフは図のようになる。



6．次の無限級数の和を求めよ。

$\displaystyle\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{27}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{81}\right)+\cdots\cdots$

解答　$\frac{1}{2}$

解説

第 n 項は　$\displaystyle\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}$

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ の公比は，それぞれ $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから，これらはともに収束する。

よって，求める和 S は

$\displaystyle S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$

$\displaystyle=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

7．$|r|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ である。このことを利用して，無限級数

$\displaystyle 1-\frac{2}{2}+\frac{3}{4}-\frac{4}{8}+\frac{5}{16}-\cdots\cdots$ の和を求めよ。

解答　$\frac{4}{9}$

解説

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$\displaystyle S_n=1+2\left(-\frac{1}{2}\right)+3\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　……①

$\displaystyle -\frac{1}{2}S_n=-\frac{1}{2}+2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$　……②

① － ② から

$\displaystyle\frac{3}{2}S_n=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

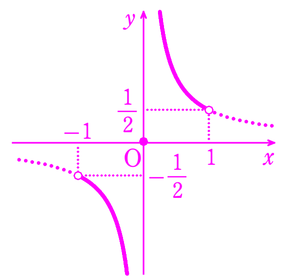
$\displaystyle=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}-n\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}-n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

ゆえに　$\displaystyle S_n=\frac{4}{9}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{2}{3}n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{4}{9}$　　したがって，求める和は　$\frac{4}{9}$

8．次の無限級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，その和を $f(x)$ とするとき，関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。$x+x(1-2x^2)+x(1-2x^2)^2+x(1-2x^2)^3+\cdots\cdots$

解答　$-1<x<1$，グラフは[図]



解説

この無限級数は，初項 x，公比 $1-2x^2$ の無限等比級数である。

よって，収束するための必要十分条件は

$x=0$　または　$x\neq 0$ のとき $-1<1-2x^2<1$

$-1<1-2x^2<1$ から　　$0<x^2<1$

ゆえに　　$-1<x<0,\ 0<x<1$

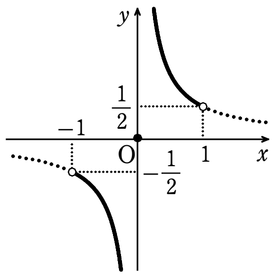
したがって，求める x の値の範囲は　　$-1<x<1$

次に，和 $f(x)$ については

$x=0$ のとき　　$f(0)=0$

$-1<x<0,\ 0<x<1$ のとき

$$f(x)=\frac{x}{1-(1-2x^2)}=\frac{1}{2x}$$



よって，$y=f(x)$ のグラフは[図]のようになる。

9．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-1}{x^2+2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x^2-x+1)-\log_2(x^2+2)\}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}$

解答　(1) $-\infty$　(2) 1　(3) ∞　(4) 2　(5) 1

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-1}{x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=-\infty$

(2) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$t\longrightarrow+0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{3}\right)^{t}=1$

(3) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow+0$ のとき　$t\longrightarrow\infty$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}=\lim_{t\to\infty}\log_2 t=\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x^2-x+1)-\log_2(x^2+2)\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x^2-x+1}{x^2+2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\log_2 4=2$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}=1$

10. 次の極限値を求めよ。　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}$

解答　$\dfrac{9}{2}$

解説

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos3x)(1+\cos3x)}{x^2(1+\cos3x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos3x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{x^2(1+\cos3x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{9}{1+\cos3x}=1^2\cdot\frac{9}{1+1}=\frac{9}{2}$

11. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-x^2-2x}{x^2-3x+2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to3+0}\frac{x^2+x-12}{|x-3|}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x}{(x-1)^3}$

解答　(1) 6　(2) 7　(3) $-\infty$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-x^2-2x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{x(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x(x+1)}{x-1}=\frac{2(2+1)}{2-1}=6$

(2) $x\longrightarrow3+0$ であるから　　$x>3$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to3+0}\frac{x^2+x-12}{|x-3|}=\lim_{x\to3+0}\frac{(x-3)(x+4)}{x-3}=\lim_{x\to3+0}(x+4)=7$

(3) $x\longrightarrow1-0$ のとき　　$\dfrac{1}{(x-1)^3}\longrightarrow-\infty$，$x\longrightarrow1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x}{(x-1)^3}=-\infty$

12. 関数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{ax+3}-1}{x-2}$ が $x\longrightarrow2$ のとき収束するように，定数 a の値を定めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

解答　$a=-1$，極限値 $-\dfrac{1}{2}$

解説

関数 $f(x)$ が $x\longrightarrow2$ のとき収束するための条件は，$\displaystyle\lim_{x\to2}(x-2)=0$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to2}(\sqrt{ax+3}-1)=0$　　すなわち　　$\sqrt{2a+3}-1=0$

$\sqrt{2a+3}=1$ の両辺を平方して　　$2a+3=1$　　ゆえに　　$a=-1$

$a=-1$ は $\sqrt{2a+3}-1=0$ を満たす。

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{-x+3}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{-x+3}-1)(\sqrt{-x+3}+1)}{(x-2)(\sqrt{-x+3}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{(-x+3)-1}{(x-2)(\sqrt{-x+3}+1)}=\lim_{x\to2}\frac{-1}{\sqrt{-x+3}+1}=-\frac{1}{2}$

13. 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-ax-b)=3$$

解答　$a=1$，$b=-1$

解説

$f(x)=\sqrt{x^2+4x}-ax-b$ とおく。　$a\leqq0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ となるから　　$a>0$

$x\longrightarrow\infty$ のときを考えるから，$x>0$ としてよい。したがって

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+4x}-ax-b)(\sqrt{x^2+4x}+ax+b)}{\sqrt{x^2+4x}+ax+b}=\frac{(x^2+4x)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2+4x}+ax+b}$$

$$=\frac{(1-a^2)x^2+2(2-ab)x-b^2}{\sqrt{x^2+4x}+ax+b}=\frac{(1-a^2)x+2(2-ab)-\frac{b^2}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+a+\frac{b}{x}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=3$ となるための条件は　　$1-a^2=0$ ……①，$\dfrac{2(2-ab)}{1+a}=3$ ……②

$a>0$ であるから，① より　　$a=1$　　ゆえに，② から　　$b=-1$

以上から　　$a=1$，$b=-1$

14. 関数 $f(x)=[\cos x]$ が，$x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続であるか不連続であるかを調べよ。

解答　不連続

解説

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$[\cos x]=0$，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき　$[\cos x]=-1$

であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}f(x)=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f(x)=0$

ゆえに，$x\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$ のときの極限はない。

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で不連続である。