数学演習（数列の極限）Ｈ２０．８．２６　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

１．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}\sin^2\frac{n\pi}{6}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n-5}-n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+5+9+\cdots\cdots+(4n-3)}{3+5+7+\cdots\cdots+(2n+1)}$

２．次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}+\cdots\cdots$$

３．関数 $\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ のグラフをかけ。

４．初項と公比が等しく，和が１である無限等比級数がある。この各項を２乗して作った無限等比級数の和を求めよ。

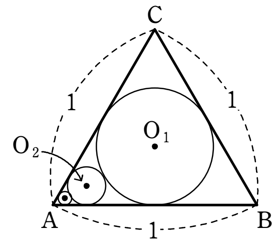
５．次のものが収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。

(1)　無限数列 $\{(x^2-3)^n\}$　　(2)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-3)^n$

６．$|r|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n=0$ である。このことを利用して，無限級数

$1-\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{8}+\dfrac{5}{16}-\cdots\cdots$ の和を求めよ。

７．1 辺が 1 の正三角形 ABC の内接円を O_1 とし，O_1 に外接し，辺 AB，AC に接する円を O_2，O_2 に外接し，辺 AB，AC に接する円を O_3 とし，以下同様にして，円 O_1，O_2，O_3，……，O_n，…… を作るとき，円の面積の総和を求めよ。ただし，円 O_n の半径を r_n とするとき，$r_n>r_{n+1}$ とする。



１．(1)　$0 \leqq \sin^2\dfrac{n\pi}{6} \leqq 1$ であるから　　$0 \leqq \dfrac{1}{n^2+1}\sin^2\dfrac{n\pi}{6} \leqq \dfrac{1}{n^2+1}$

ここで，$\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+1} = 0$ であるから　　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+1}\sin^2\dfrac{n\pi}{6} = 0$

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n-5}-n} = \dfrac{\sqrt{n^2+3n-5}+n}{(\sqrt{n^2+3n-5}-n)(\sqrt{n^2+3n-5}+n)}$

$= \dfrac{\sqrt{n^2+3n-5}+n}{(n^2+3n-5)-n^2} = \dfrac{\sqrt{n^2+3n-5}+n}{3n-5}$　であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n-5}-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n-5}+n}{3n-5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}}+1}{3-\dfrac{5}{n}}$$

$= \dfrac{1+1}{3} = \dfrac{2}{3}$

(3)　(分子) $= \sum\limits_{k=1}^{n}(4k-3) = 4\sum\limits_{k=1}^{n}k - 3\sum\limits_{k=1}^{n}1 = 4\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1) - 3n = n(2n-1)$

(分母) $= \sum\limits_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum\limits_{k=1}^{n}k + \sum\limits_{k=1}^{n}1 = 2\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1) + n = n(n+2)$

したがって　　(与式) $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(2n-1)}{n(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}} = 2$

２．第 n 項までの部分和を S_n とする。

$\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4n-3} - \dfrac{1}{4n+1}\right)$ であるから

$S_n = \dfrac{1}{4}\left\{\left(1-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{9}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{4n-3}-\dfrac{1}{4n+1}\right)\right\} = \dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{4n+1}\right)$

ゆえに　　$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{4}$

よって，この無限級数は収束し，その和は　$\dfrac{1}{4}$

３．$y = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}$

[1]　$|x|<1$ のとき　　$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n} = 0$ であるから　　$y = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}} = \dfrac{1+x-0}{1+0} = x+1$

[2]　$x=1$ のとき　　$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n} = 1$ であるから　　$y = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}} = \dfrac{1+1-1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

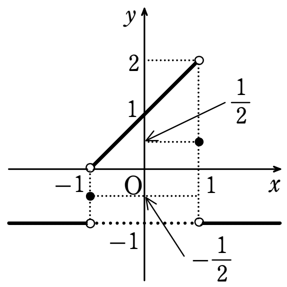
[3]　$x=-1$ のとき　　$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n} = 1$ であるから　　$y = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}} = \dfrac{1-1-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$

[4]　$|x|>1$ のとき　$\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$ より，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^{2n}} = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^{2n-1}} = 0$ であるから

$y = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^{2n}}+\dfrac{1}{x^{2n-1}}-1}{\dfrac{1}{x^{2n}}+1}$

$= \dfrac{0+0-1}{0+1} = -1$



以上から，グラフは図のようになる。

４．もとの無限等比級数の初項と公比を a とすると，和が 1 であるから

$\dfrac{a}{1-a} = 1$　……①

ただし　　$-1<a<0$，$0<a<1$

① を解くと　　$a = \dfrac{1}{2}$

よって，各項を 2 乗して作った無限等比級数の初項は $\dfrac{1}{4}$，公比は $\dfrac{1}{4}$ となる。

この公比について，$\dfrac{1}{4}<1$ であるから，収束して，求める和は　$\dfrac{\dfrac{1}{4}}{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{3}$

５．(1)　この無限数列が収束するための必要十分条件は　　$-1<x^2-3 \leqq 1$

$-1<x^2-3$ から　　$x^2-2>0$　　　よって　　$x<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<x$　……①

$x^2-3 \leqq 1$　から　　$x^2-4 \leqq 0$　　　よって　　$-2 \leqq x \leqq 2$　　　……②

①，② の共通範囲を求めて　　$-2 \leqq x < -\sqrt{2}$，$\sqrt{2} < x \leqq 2$

(2)　この無限級数は初項，公比ともに x^2-3 の無限等比級数である。

よって，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$x^2-3=0$　……①　　または　　$|x^2-3|<1$　……②

① は ② に含まれるから，② を満たす実数 x の値の範囲を求めればよい。

② から　　$-1<x^2-3<1$

$-1<x^2-3$ から　　$x^2-2>0$　　　よって　　$x<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<x$　……③

$x^2-3<1$　から　　$x^2-4<0$　　　よって　　$-2<x<2$　　　……④

③，④ の共通範囲を求めて　　$-2<x<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<x<2$

６．第 n 項までの部分和を S_n とすると

$S_n = 1+2\left(-\dfrac{1}{2}\right)+3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+n\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　……①

$-\dfrac{1}{2}S_n = -\dfrac{1}{2}+2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+(n-1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+n\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$　……②

① − ② から

$\dfrac{3}{2}S_n = 1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-n\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

$= \dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}{1+\dfrac{1}{2}} - n\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\} - n\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

ゆえに　　$S_n = \dfrac{4}{9}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\} - \dfrac{2}{3}n\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

よって　　$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{4}{9}$　　　したがって，求める和は　　$\dfrac{4}{9}$

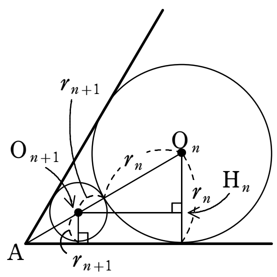
７．円 O_n の半径を r_n，面積を S_n とし，点 O_{n+1} を通り辺 AB に平行な直線と点 O_n から AB に下ろした垂線との交点を H_n とする。

$\triangle\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{H}_n$ において，$\angle\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{H}_n = 30^\circ$ であるから

$\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\sin 30^\circ = \mathrm{O}_n\mathrm{H}_n$

すなわち　$(r_n+r_{n+1})\cdot\dfrac{1}{2} = r_n - r_{n+1}$

よって　　$r_{n+1} = \dfrac{1}{3}r_n$



したがって，円 O_n と円 O_{n+1} の面積比は $9:1$ であるから　　$S_{n+1} = \dfrac{1}{9}S_n$

また，$r_1 = \dfrac{1}{2}\tan 30^\circ = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ であるから　　$S_1 = \dfrac{\pi}{12}$

ゆえに，円の面積の総和は，初項 $\dfrac{\pi}{12}$，公比 $\dfrac{1}{9}$ の無限等比級数の和で表され

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\dfrac{\pi}{12}}{1-\dfrac{1}{9}} = \frac{3}{32}\pi$$