

1. 次の極限を求めよ。 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2+5}{3n^2-7n}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{3}$ 2. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4^n}{4^n + (-2)^n}$ を求めよ。 3. 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。 $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{3}{n(n+1)} + \cdots$	4. 次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。 $(3 + \sqrt{2}) + (2\sqrt{2} - 1) + (5 - 3\sqrt{2}) + \cdots$ 5. 次の極限值を求めよ。 (1) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 6x + 2)$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3} \log_3 x$ (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{12}{x - 4} + 3 \right)$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$	6. 次の極限を求めよ。 (1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2}$ (2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x+1)^2}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2}$ (4) $\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x+2}{ 3x+6 }$ 7. 次の極限を調べよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。 (1) $\lim_{x \rightarrow 2-0} [x]$ (2) $\lim_{x \rightarrow -3+0} [x]$ (3) $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$
--	---	---

8. 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x^3}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + x^2 - 3x)$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x)$

9. 次の等式が成り立つように、定数 a , b の値を定めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 3$$

10. 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^x$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_4 x$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{4}} x$

(7) $\lim_{x \rightarrow +0} 5^{\frac{1}{x}}$

(8) $\lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$

11. 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x}$

12. 方程式 $\cos x - x^2 = 0$ は、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

1. 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2+5}{3n^2-7n}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{3}$

解答 (1) 2 (2) 0

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2+5}{3n^2-7n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6+\frac{5}{n^2}}{3-\frac{7}{n}} = \frac{6+0}{3-0} = 2$

(2) $-1 \leq \cos \frac{n\pi}{3} \leq 1$ であるから $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{3} \leq \frac{1}{n^2}$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ であるから

はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{3} = 0$

2. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4^n}{4^n + (-2)^n}$ を求めよ。

解答 -1

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4^n}{4^n + (-2)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{0-1}{1+0} = -1$

3. 次の無限級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

$\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{3}{n(n+1)} + \dots$

解答 収束, 3

第 n 項までの部分 and を S_n とする。

$$S_n = \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{3}{n(n+1)}$$

$$= 3 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= 3 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$ よって、この無限級数は収束し、その和は 3

4. 次の無限等比級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

$(3+\sqrt{2}) + (2\sqrt{2}-1) + (5-3\sqrt{2}) + \dots$

解答 収束, $\frac{8+5\sqrt{2}}{2}$

初項は $3+\sqrt{2}$, 公比は $r = \frac{2\sqrt{2}-1}{3+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$ で $|r| < 1$

よって、この無限等比級数は収束し、その和 S は

$$S = \frac{3+\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2}-1)} = \frac{3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{8+5\sqrt{2}}{2}$$

5. 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 6x + 2)$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3} \log_3 x$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{12}{x-4} + 3 \right)$

解答 (1) 2 (2) 1 (3) -1 (4) $-\frac{3}{4}$ (5) $\frac{1}{2}$

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 6x + 2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = 2$

(2) $\lim_{x \rightarrow 3} \log_3 x = \log_3 3 = 1$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = 1-2 = -1$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{12}{x-4} + 3 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{12+3(x-4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x-4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$$

6. 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2}$ (2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x+1)^2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2}$ (4) $\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x+2}{3x+6}$

解答 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) $-\infty$ (4) $-\frac{1}{3}$

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$

(2) $x \rightarrow -1$ のとき $\frac{1}{(x+1)^2} \rightarrow \infty$ よって $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty$

(3) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty$

(4) $x \rightarrow -2-0$ であるから $x < -2$

よって $\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x+2}{3x+6} = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x+2}{-3(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

7. 次の極限を調べよ。ただし、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $\lim_{x \rightarrow 2-0} [x]$ (2) $\lim_{x \rightarrow -3+0} [x]$ (3) $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$

解答 (1) 1 (2) -3 (3) 極限はない

(1) $x \rightarrow 2-0$ であるから $x < 2$

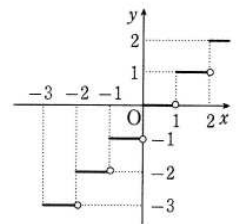
よって $\lim_{x \rightarrow 2-0} [x] = 1$

(2) $x \rightarrow -3+0$ であるから $x > -3$

よって $\lim_{x \rightarrow -3+0} [x] = -3$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1+0} [x] = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} [x] = 0$

よって、 $x \rightarrow 1$ のときの極限はない。



8. 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x^3} \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + x^2 - 3x) \quad (3) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x)$$

解答 (1) $\frac{0}{\infty}$ (2) $-\infty$ (3) $-\infty$

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x^3} = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + x^2 - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = -\infty$$

$$(3) x = -t \text{ とおくと, } x \rightarrow -\infty \text{ のとき } t \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - 2t} - t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2 - 2t} - t)(\sqrt{t^2 - 2t} + t)}{\sqrt{t^2 - 2t} + t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t^2 - 2t) - t^2}{\sqrt{t^2 - 2t} + t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t}{\sqrt{t^2 - 2t} + t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{t}} + 1} = -1 \end{aligned}$$

9. 次の等式が成り立つように、定数 a, b の値を定めよ。 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} = 3$

解答 $a = 1, b = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} = 3 \text{ において,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$$

$$\text{ゆえに } 1 + a + b = 0 \text{ すなわち } b = -(a+1) \dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} \text{このとき } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - (a+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1+a) = a+2 \end{aligned}$$

$$\text{よって } a+2=3$$

$$\text{ゆえに } a=1$$

$$\text{① から } b = -2 \text{ したがって } a=1, b=-2$$

10. 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} 3^x \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (5) \lim_{x \rightarrow \infty} \log_4 x \quad (6) \lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{4}} x$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +0} 5^{\frac{1}{x}} \quad (8) \lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$$

解答 (1) ∞ (2) 0 (3) 0 (4) ∞ (5) ∞ (6) $-\infty$ (7) ∞

$$(8) \infty$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} 3^x = \infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \infty$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \log_4 x = \infty$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{4}} x = -\infty$$

$$(7) \frac{1}{x} = t \text{ とおくと, } x \rightarrow +0 \text{ のとき } t \rightarrow \infty$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow +0} 5^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} 5^t = \infty$$

$$(8) \frac{1}{x} = t \text{ とおくと, } x \rightarrow -0 \text{ のとき } t \rightarrow -\infty$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^t = \infty$$

11. 次の極限値を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x}$$

解答 (1) 4 (2) $\frac{5}{3}$ (3) $\frac{1}{2}$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} = 4 \cdot 1 = 4$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{3} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{5}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cos x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

12. 方程式 $\cos x - x^2 = 0$ は、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。

解答 略

$$f(x) = \cos x - x^2 \text{ とおくと, } f(x) \text{ は閉区間 } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ で連続である。}$$

$$\text{また } f(0) = 1 - 0^2 = 1 > 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = -\frac{\pi^2}{4} < 0$$

よって、方程式 $f(x) = 0$ すなわち $\cos x - x^2 = 0$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。