数学演習（極限）Ｈ２４．５．１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5}{3n^2-7n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3-2n^2-3n)$

２．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3})$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}$

３．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-4^n}{4^n+(-2)^n}$ を求めよ。

４．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1})$

５．次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}+\cdots\cdots$$

６．次の無限級数の和を求めよ。　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}-\frac{3}{4^{n-1}}\right)$

７．(1)　次の関数の連続性を調べ，そのグラフをかけ。　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$

(2)　無限級数 $\displaystyle\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}+\cdots\cdots$ の和を $f(x)$ とおくとき，関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

８. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(2-\frac{6}{x+3}\right)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x}{(x+1)^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(4x^3-7x^2)$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7}{x+3}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-0}5^{\frac{1}{x}}$

９. 次の極限を調べよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2+0}\frac{x^2-4}{|x-2|}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{x^2-4}{|x-2|}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{|x-2|}$

10. 次の極限を調べよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2-0}[x]$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-3+0}[x]$

11. 次の極限を求めよ。　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$

12. 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}$ を求めよ。

13. 関数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{ax+8}-2}{x+4}$ が $x\longrightarrow-4$ のとき収束するように，定数 a の値を定めよ。

また，そのときの極限値を求めよ。

14. 方程式 $\cos x=x^2$ は，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも１つの実数解をもつことを，中間値の定理を用いて示せ。

数学演習（極限）Ｈ２４．５．１　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5}{3n^2-7n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3-2n^2-3n)$

解答　(1) 2　(2) ∞

解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5}{3n^2-7n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{5}{n^2}}{3-\frac{7}{n}}=\frac{6+0}{3-0}=2$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3-2n^2-3n)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1-\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}\right)=\infty$

2．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3})$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}$

解答　(1) 0　(2) 0

解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)-(n-3)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}}=0$

(2) $\displaystyle -1\leqq\cos\frac{n\pi}{3}\leqq 1$ であるから　$\displaystyle -\frac{1}{n^2}\leqq\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}\leqq\frac{1}{n^2}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}=0$

3．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-4^n}{4^n+(-2)^n}$ を求めよ。

解答　-1

解説

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-4^n}{4^n+(-2)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{0-1}{1+0}=-1$

4．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1})$

解答　(1) 1　(2) $\frac{3}{2}$

解説

(1) 分母は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

よって　$\displaystyle(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}=1$

(2) $\displaystyle\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1}=\frac{(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}}$

$\displaystyle=\frac{(n+4)-(n+1)}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}}=\frac{3}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}}$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{3\cdot1}{1+1}=\frac{3}{2}$

5．次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}+\cdots\cdots$$

解答　収束，和 $\frac{1}{4}$

解説

第 n 項までの部分和を S_n とする。

$\displaystyle\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$ であるから

$\displaystyle S_n=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right\}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$

よって，この無限級数は収束し，その和は　$\frac{1}{4}$

6．次の無限級数の和を求めよ。　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}-\frac{3}{4^{n-1}}\right)$

解答　-3

解説

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^{n-1}}$ の公比は，それぞれ $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから，これらはともに収束する。

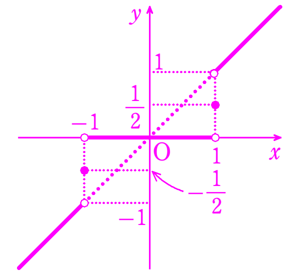
よって，求める和 S は

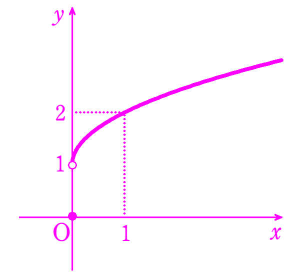
$\displaystyle S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=1-4=-3$

7．(1)　次の関数の連続性を調べ，そのグラフをかけ。　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$

(2)　無限級数 $\displaystyle\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}+\cdots\cdots$ の和を $f(x)$ とおくとき，関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

解答　(1)　$x=\pm1$ で不連続，他で連続；[図]　(2)





解説

(1)　[1]　$x^2<1$ すなわち $-1<x<1$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$ であるから　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=0$

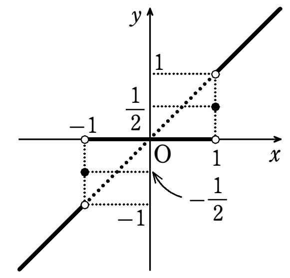
[2]　$x^2=1$ すなわち $x=\pm1$ のとき

$x=1$ のとき $y=\frac{1}{2}$，　$x=-1$ のとき $y=-\frac{1}{2}$

[3]　$x^2>1$ すなわち $x<-1$，$1<x$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$ であるから　$\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=x$

よって，$x=\pm1$ で不連続，他で連続。グラフは[図]



(2)　関数 $y=f(x)$ の定義域は　$x\geqq0$

この無限級数は，初項 $\sqrt{x}$，公比 $\displaystyle\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ の無限等比級数である。

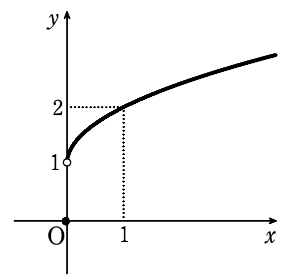
$x=0$ のとき，この無限等比級数は収束し，その和は 0 である。すなわち　$f(0)=0$

$x>0$ のとき，$\displaystyle 0<\frac{1}{1+\sqrt{x}}<1$ であるから，この無限等比級数は収束し，その和は

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\frac{1}{1+\sqrt{x}}}=1+\sqrt{x}$$

よって　$\begin{cases}x=0\ のとき & f(0)=0\\ x>0\ のとき & f(x)=1+\sqrt{x}\end{cases}$

したがって，関数 $y=f(x)$ のグラフは[図]



8．次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(2-\frac{6}{x+3}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x}{(x+1)^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(4x^3-7x^2)$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7}{x+3}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-0}5^{\frac{1}{x}}$

解答　(1) $\dfrac{2}{3}$　(2) $-\infty$　(3) $-\infty$　(4) ∞　(5) 0

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(2-\frac{6}{x+3}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2(x+3)-6}{x+3}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(x+3)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{x+3}=\frac{2}{3}$

(2) $x\longrightarrow-1$ のとき　$\dfrac{1}{(x+1)^2}\longrightarrow\infty$　　よって　$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x}{(x+1)^2}=-\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(4x^3-7x^2)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(4-\frac{7}{x}\right)=-\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\frac{7}{x}}{1+\frac{3}{x}}=\infty$

(5) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow-0$ のとき $t\longrightarrow-\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-0}5^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}5^t=0$$

9．次の極限を調べよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2+0}\frac{x^2-4}{|x-2|}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{x^2-4}{|x-2|}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{|x-2|}$

解答　(1) 4　(2) -4　(3) 極限はない

解説

(1) $x\longrightarrow2+0$ より，$x>2$ であるから　$|x-2|=x-2$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to2+0}\frac{x^2-4}{|x-2|}=\lim_{x\to2+0}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2+0}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2+0}(x+2)=4$

(2) $x\longrightarrow2-0$ より，$x<2$ であるから　$|x-2|=-(x-2)$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{x^2-4}{|x-2|}=\lim_{x\to2-0}\frac{x^2-4}{-(x-2)}=\lim_{x\to2-0}\frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)}=\lim_{x\to2-0}\{-(x+2)\}$

$=-4$

(3) (1)，(2) から，右側極限と左側極限が一致しない。
したがって，$x\longrightarrow2$ のときの極限はない。

10．次の極限を調べよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

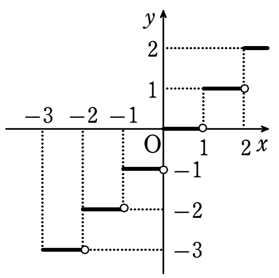
(1) $\displaystyle\lim_{x\to2-0}[x]$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-3+0}[x]$

解答　(1) 1　(2) -3

解説

(1) $x\longrightarrow2-0$ であるから　$x<2$
よって　$\displaystyle\lim_{x\to2-0}[x]=1$

(2) $x\longrightarrow-3+0$ であるから　$x>-3$
よって　$\displaystyle\lim_{x\to-3+0}[x]=-3$



11．次の極限を求めよ。　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$

解答　-1

解説

$x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow\infty$
したがって

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-2t}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-2t}-t)(\sqrt{t^2-2t}+t)}{\sqrt{t^2-2t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-2t)-t^2}{\sqrt{t^2-2t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2-2t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{t}}+1}=-1$$

12．極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}$ を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{2}$

解説

$x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと，$x\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t\longrightarrow0$ であるから

$$(\text{与式})=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$$

13．関数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{ax+8}-2}{x+4}$ が $x\longrightarrow-4$ のとき収束するように，定数 a の値を定めよ。
また，そのときの極限値を求めよ。

解答　$a=1$，極限値 $\dfrac{1}{4}$

解説

関数 $f(x)$ が $x\longrightarrow-4$ のとき収束するための条件は，$\displaystyle\lim_{x\to-4}(x+4)=0$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to-4}(\sqrt{ax+8}-2)=0$　すなわち　$\sqrt{-4a+8}-2=0$

$\sqrt{-4a+8}=2$ の両辺を平方して　$-4a+8=4$　　ゆえに　$a=1$

$a=1$ は $\sqrt{-4a+8}=2$ を満たす。

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to-4}f(x)=\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{x+8}-2}{x+4}=\lim_{x\to-4}\frac{(\sqrt{x+8}-2)(\sqrt{x+8}+2)}{(x+4)(\sqrt{x+8}+2)}$

$$=\lim_{x\to-4}\frac{(x+8)-4}{(x+4)(\sqrt{x+8}+2)}=\lim_{x\to-4}\frac{1}{\sqrt{x+8}+2}=\frac{1}{4}$$

以上から　　$a=1$，極限値 $\dfrac{1}{4}$

14．方程式 $\cos x=x^2$ は，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを，中間値の定理を用いて示せ。

解答　略

解説

$f(x)=\cos x-x^2$ とおくと，$f(x)$ は閉区間 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ で連続である。

また　$f(0)=1-0^2=1>0$，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=-\frac{\pi^2}{4}<0$$

よって，方程式 $f(x)=0$　すなわち　$\cos x=x^2$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。