第１回定期考査（関数の極限）Ｈ２７．５．２２　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -2-0}\frac{x+2}{|3x+6|}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}+x\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{3x+4}{(x+2)^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left\{\log_2(4x^3+x^2)-3\log_2 x\right\}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

(9) $\lim_{x \to 0} 3^{\frac{1}{x}}$

(10) $\lim_{x \to -3+0} [x]$

2．等式 $\lim_{x \to 1} \dfrac{a\sqrt{x^2+3x+5}+b}{x-1}=5$ が成り立つように，定数 a , b の値を定めよ。

3．$\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$，$\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}=-3$ を満たす x の多項式で表される関数 $f(x)$ を求めよ。

4．方程式 $x-\sin x-3=0$ は$0<x<\pi$ の範囲に少なくとも１つの実数解をもつことを示せ。

5．関数 $y=\lim_{n \to \infty} \dfrac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$ のグラフをかき，その連続性を調べよ。

第１回定期考査（関数の極限）　Ｈ２７．５．２２　　　（　　）組（　　）番　名前（ こたえ 　　）

１．次の極限を求めよ。（各6点）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-2-0}\frac{x+2}{|3x+6|}$

$x<-2$ の時 $3x+6<0$ より $|3x+6|=-(3x+6)$

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x+2}{|3x+6|}=\lim_{x\to-2-0}\frac{x+2}{-(3x+6)}$$

$$=\lim_{x\to-2-0}\frac{x+2}{-3(x+2)}=-\frac{1}{3}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}+x)$

$x=-t$ とおくと $x\to-\infty$ の時 $t\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}+x)$$

$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+3t+1}-t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+3t+1-t^2}{\sqrt{t^2+3t+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3t+1}{\sqrt{t^2+3t+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3+\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{3x+4}{(x+2)^2}$

$x\to-2$ の時

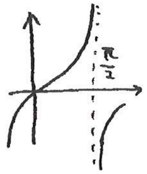
(分子) $\to 3(-2)+4=-2$

(分母) $\to 0^2=0$

$\left(-\dfrac{2}{0}=-\infty\right)$

$$\therefore \lim_{x\to-2}\frac{3x+4}{(x+2)^2}=-\infty$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan x}$



$x\to\frac{\pi}{2}+0$ の時 $\tan x\to-\infty$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{1}{\tan x}=0$

$x\to\frac{\pi}{2}-0$ の時 $\tan x\to+\infty$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\tan x}=0$

よって片側極限が一致するので $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan x}=0$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}\cdot\frac{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2}{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt[3]{1+x})^3-(\sqrt[3]{1-x})^3}{x\{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2\}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2\}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2}$$

$$=\frac{2}{(\sqrt[3]{1})^2+\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{1}+(\sqrt[3]{1})^2}=\frac{2}{3}$$

$$\left((a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3\right)$$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$

$x-1=t$ とおくと $x\to1$ の時 $t\to0$. また $x=t+1$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\pi(t+1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t+\pi)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\pi t}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\pi t}{\pi t}\cdot\pi$$

$$=-\pi$$

$(\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x^3+x^2)-3\log_2 x\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x^3+x^2)-\log_2 x^3\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x^3+x^2}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_2\left(4+\frac{1}{x}\right)=\log_2 4=2$$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos 3x}{1+\cos 3x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2(1+\cos 3x)}\cdot3^2$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{9}{1+\cos 3x}$$

$$=1^2\cdot\frac{9}{1+1}$$

$$=\frac{9}{2}$$

(9) $\lim_{x\to 0} 3^{\frac{1}{x}}$

$x\to+0$ の時 $\frac{1}{x}\to+\infty$ より $3^{\frac{1}{x}}\to\infty$

$x\to-0$ の時 $\frac{1}{x}\to-\infty$ より $3^{\frac{1}{x}}\to 0$.

片側極限が一致しないので

極限は存在しない。

(10) $\lim_{x\to-3+0}[x]$

$\lim_{x\to-3+0}[x]=-3$

-3　-2

$x\to-3+0$

$(-2.9, -2.99, \cdots)$

2．等式 $\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+3x+5}+b}{x-1}=5$ が成り立つように，定数 a,b の値を定めよ。

$x\to1$ の時，分母$\to0$ より 分子$\to0$ でないとならない

$\therefore \lim_{x\to1}(a\sqrt{x^2+3x+5}+b)=0$

$a\sqrt{1+3+5}+b=0$　　$\therefore b=-3a$

よって

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+3x+5}+b}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+3x+5}-3a}{x-1}$$

$$=a\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3x+5}-3}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x+5}+3}{\sqrt{x^2+3x+5}+3}$$

$$=a\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x+5-9}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x+5}+3)}$$

$$=a\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x^2+3x+5}+3)}$$

$$=a\lim_{x\to1}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x+5}+3}$$

$$=a\cdot\frac{1+4}{\sqrt{1+3+5}+3}$$

$$=a\cdot\frac{5}{6}=5$$

$\therefore a=6$

$b=-18$

(10)

3．$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$，$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-3$ を満たす x の多項式で表される関数 $f(x)$ を求めよ。

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$ より $f(x)-2x^3$ は2次式である。

よって $f(x)-2x^3=ax^2+bx+c$

$\therefore f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$

とおける。また $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-3$ で $x\to0$ の時 分母$\to0$

より 分子$\to0$　つまり $\lim_{x\to0}f(x)=0$ である。

よって $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(2x^3+ax^2+bx+c)=c=0$

$\therefore f(x)=2x^3+ax^2+bx$

そして $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}\right)=a=1$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3+ax^2+bx}{x}=\lim_{x\to0}(2x^2+ax+b)=b=-3$

$\therefore f(x)=2x^3+x^2-3x$

(10)

4．方程式 $x-\sin x-3=0$ は $0<x<\pi$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。

$f(x)=x-\sin x-3$ とおくと

$f(x)$ は $0<x<\pi$ において連続である。

また

$f(0)=0-0-3=-3<0$.

$f(\pi)=\pi-\sin\pi-3$

$=\pi-0-3=\pi-3>0$

($\pi>3$ より)

よって，中間値の定理から

方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\pi$ において

少なくとも1つ実数解をもつ

(10)

5．関数 $y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$ のグラフをかき，その連続性を調べよ。

・$x^2<1$　$(-1<x<1)$ の時

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$ より

$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\frac{0}{1+0}=0$.

・$x^2=1$　$(x=\pm1)$ の時

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$ より

$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x\cdot x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{x\cdot1}{1+1}=\frac{x}{2}$

よって　$x=1$ の時，$y=\frac{1}{2}$

$x=-1$ の時，$y=-\frac{1}{2}$

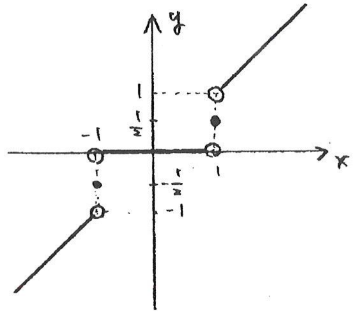
・$x^2>1$　$(x<-1,\ x>1)$ の時

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$ より

$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=\frac{x}{0+1}=x$

以上より

$$y=\begin{cases}0 & (-1<x<1)\\ \frac{1}{2} & (x=1)\\ -\frac{1}{2} & (x=-1)\\ x & (x<-1,\ x>1)\end{cases}$$



連続性について

$x=\pm1$ で

不連続，

他の x では連続

(10)