数学演習（関数の極限）Ｈ２１．５．１５　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

１. 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^2-3x+2}$　　(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{12}{x-4}+3\right)$

２. 次の極限値を求めよ。　$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{x}$

３. 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to -1+0}\dfrac{2x+3}{x+1}$　　(2) $\lim_{x\to -2-0}\dfrac{x+2}{|3x+6|}$

４. 次の極限を調べよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。　$\lim_{x\to 2-0}[x]$

５. 次の極限を調べよ。

(1) $\lim_{x\to 1+0}\dfrac{x}{(x-1)^3}$　　(2) $\lim_{x\to 1-0}\dfrac{x}{(x-1)^3}$　　(3) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x}{(x-1)^3}$

６. 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。　$\lim_{x\to 1}\dfrac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=2$

７. 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-6x+2}{2x^2+1}$　　(2) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{4x}{x^2+2}$

8．次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty} 3^x$　　(2) $\lim_{x\to-\infty} 3^x$　　(3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$

(4) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　(5) $\lim_{x\to\infty}\log_4 x$　　(6) $\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{4}} x$

(7) $\lim_{x\to+0} 5^{\frac{1}{x}}$　　(8) $\lim_{x\to-0}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$

9．次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x^2-x+1)-\log_2(x^2+2)\}$　　(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}$

10. 次の極限を求めよ。　$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$

11. 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x}$　　(2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$　　(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\tan x}$

12. 次の極限値を求めよ。　$\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}$

13. 極限値 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}$ を求めよ。

14. 次の方程式は，(　) 内の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

$\cos x = x^2 \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

数学演習（関数の極限）Ｈ２１．５．１５　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-2x}{x^2-3x+2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{12}{x-4}+3\right)$

解答　(1) 6　(2) $-\dfrac{3}{4}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-2x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x+1)}{x-1}=\frac{2(2+1)}{2-1}=6$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{12}{x-4}+3\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{12+3(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x(x-4)}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x-4}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}$

2. 次の極限値を求めよ。　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{x}$

解答　$\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})}{x(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)-(x+1)}{x(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$

3. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -1+0}\frac{2x+3}{x+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -2-0}\frac{x+2}{|3x+6|}$

解答　(1) ∞　(2) $-\dfrac{1}{3}$

(1) $\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+2$

$x\longrightarrow -1+0$ のとき　$\dfrac{1}{x+1}\longrightarrow\infty$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to -1+0}\frac{2x+3}{x+1}=\lim_{x\to -1+0}\left(\frac{1}{x+1}+2\right)=\infty$

(2) $x\longrightarrow -2-0$ であるから　$x<-2$

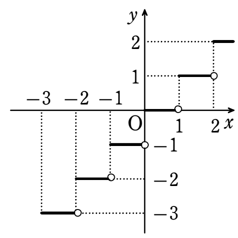
よって　$\displaystyle\lim_{x\to -2-0}\frac{x+2}{|3x+6|}=\lim_{x\to -2-0}\frac{x+2}{-3(x+2)}=\lim_{x\to -2-0}\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$

4. 次の極限を調べよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。　$\displaystyle\lim_{x\to 2-0}[x]$

解答　1

$x\longrightarrow 2-0$ であるから　$x<2$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 2-0}[x]=1$



5. 次の極限を調べよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{(x-1)^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{(x-1)^3}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x-1)^3}$

解答　(1) ∞　(2) $-\infty$　(3) 極限はない

(1) $x\longrightarrow 1+0$ のとき　$\dfrac{1}{(x-1)^3}\longrightarrow\infty$，$x\longrightarrow 1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{(x-1)^3}=\infty$

(2) $x\longrightarrow 1-0$ のとき　$\dfrac{1}{(x-1)^3}\longrightarrow -\infty$，$x\longrightarrow 1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{(x-1)^3}=-\infty$

(3) (1)，(2) から，右側極限と左側極限が一致しない。
したがって，$x\longrightarrow 1$ のときの極限はない。

6. 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=2$

解答　$a=4\sqrt{2}$，$b=8$

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=2$ において，

$\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to 1}(a\sqrt{x+1}-b)=0$

ゆえに　$\sqrt{2}\,a-b=0$　すなわち　$b=\sqrt{2}\,a$　……①

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\,a}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a\{(x+1)-2\}}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$

$\displaystyle=\frac{a}{2\sqrt{2}}$

よって　$\dfrac{a}{2\sqrt{2}}=2$　　ゆえに　$a=4\sqrt{2}$

① から　$b=8$　　したがって　$a=4\sqrt{2}$，$b=8$

7. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-6x+2}{2x^2+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{4x}{x^2+2}$

解答　(1) $\dfrac{5}{2}$　(2) 0

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-6x+2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{4x}{x^2+2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x^2}}=0$

8. 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty} 3^x$　(2) $\lim_{x\to-\infty} 3^x$　(3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$

(4) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$　(5) $\lim_{x\to\infty}\log_4 x$　(6) $\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{4}} x$

(7) $\lim_{x\to+0} 5^{\frac{1}{x}}$　(8) $\lim_{x\to-0}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$

解答　(1) ∞　(2) 0　(3) 0　(4) ∞　(5) ∞　(6) $-\infty$　(7) ∞
(8) ∞

(1) $\lim_{x\to\infty} 3^x=\infty$

(2) $\lim_{x\to-\infty} 3^x=0$

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$

(4) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\infty$

(5) $\lim_{x\to\infty}\log_4 x=\infty$

(6) $\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{4}} x=-\infty$

(7) $\frac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow +0$ のとき　$t\longrightarrow\infty$

よって　$\lim_{x\to+0} 5^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}5^t=\infty$

(8) $\frac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow -0$ のとき　$t\longrightarrow -\infty$

よって　$\lim_{x\to-0}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^t=\infty$

9. 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x^2-x+1)-\log_2(x^2+2)\}$　(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}$

解答　(1) 2　(2) 1

(1) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x^2-x+1)-\log_2(x^2+2)\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x^2-x+1}{x^2+2}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\log_2 4=2$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}=1$

10. 次の極限を求めよ。　$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$

解答　-1

$x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow -\infty$ のとき　$t\longrightarrow\infty$

したがって

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-2t}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-2t}-t)(\sqrt{t^2-2t}+t)}{\sqrt{t^2-2t}+t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-2t)-t^2}{\sqrt{t^2-2t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2-2t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{t}}+1}=-1$

11. 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x}$　(2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$　(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\tan x}$

解答　(1) 4　(2) $\frac{5}{3}$　(3) 2

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to0}4\cdot\frac{\sin 4x}{4x}=4\cdot1=4$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{5}{3}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{5}{3}\cdot1\cdot1=\frac{5}{3}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\tan x}=\lim_{x\to0}2\sin x\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}2\cos^2 x=2$

12. 次の極限値を求めよ。　$\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}$

解答　4

$\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot2(1+\cos x)=1\cdot2(1+1)=4$

13. 極限値 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}$ を求めよ。

解答　$\frac{1}{2}$

$x-\frac{\pi}{2}=t$ とおくと，$x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$ のとき $t\longrightarrow 0$ であるから

(与式)$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$

14. 次の方程式は，(　) 内の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

$\cos x=x^2\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

解答　略

$f(x)=\cos x-x^2$ とおくと，$f(x)$ は閉区間 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ で連続である。

また　$f(0)=1-0^2=1>0$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=-\frac{\pi^2}{4}<0$

よって，方程式 $f(x)=0$　すなわち　$\cos x=x^2$ は $0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。