数学演習（合成関数）R２．２．２０　　　（　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ ⑴　$f(x)=x-1$，$g(x)=-2x+3$，$h(x)=2x^2+1$ について，次のものを求めよ。

（ア）　$(f\circ g)(x)$　　（イ）　$(g\circ f)(x)$　　（ウ）　$(g\circ g)(x)$

（エ）　$((h\circ g)\circ f)(x)$　　（オ）　$(f\circ(g\circ h))(x)$

⑵　関数 $f(x)=x^2-2x$，$g(x)=-x^2+4x$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$ の定義域と値域を求めよ。

$\boxed{2}$ a，b，c，k は実数の定数で，$a\neq 0$，$k\neq 0$ とする。2つの関数

$$f(x)=ax^3+bx+c,\quad g(x)=2x^2+k$$

に対して，合成関数に関する等式 $g(f(x))=f(g(x))$ がすべての x について成り立つとする。このとき，a，b，c，k の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 3次関数 $f(x)=x^3+bx+c$ に対し，$g(f(x))=f(g(x))$ を満たすような1次関数 $g(x)$ をすべて求めよ。

$\boxed{4}$ x の関数 $f(x)=ax+1$ $(0<a<1)$ に対し，$f_1(x)=f(x)$，$f_2(x)=f(f_1(x))$，$f_3(x)=f(f_2(x))$，……，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$ $[n \geqq 2]$ とするとき，$f_n(x)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ $(x \fallingdotseq 0)$ とする。

(1) $f(f(x))$ を求めよ。また，$y=f(f(x))$ のグラフの概形をかけ。

(2) 直線 $y=bx+a$ と曲線 $y=f(f(x))$ が共有点をもたないとき，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。

1 (1) $f(x)=x-1$, $g(x)=-2x+3$, $h(x)=2x^2+1$ について，次のものを求めよ。

（ア） $(f\circ g)(x)$　（イ） $(g\circ f)(x)$　（ウ） $(g\circ g)(x)$

（エ） $((h\circ g)\circ f)(x)$　（オ） $(f\circ(g\circ h))(x)$

(2) 関数 $f(x)=x^2-2x$, $g(x)=-x^2+4x$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$ の定義域と値域を求めよ。

解答 (1) （ア） $-2x+2$　（イ） $-2x+5$　（ウ） $4x-3$　（エ） $8x^2-40x+51$　（オ） $-4x^2$

(2) 定義域は実数全体，値域は $y\leqq 4$

解説

(1) （ア） $(f\circ g)(x)=f(g(x))=g(x)-1=(-2x+3)-1=-2x+2$

（イ） $(g\circ f)(x)=g(f(x))=-2f(x)+3=-2(x-1)+3=-2x+5$

（ウ） $(g\circ g)(x)=g(g(x))=-2g(x)+3=-2(-2x+3)+3=4x-3$

（エ） $(h\circ g)(x)=h(g(x))=2(-2x+3)^2+1$

$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=2\{-2(x-1)+3\}^2+1=2(-2x+5)^2+1$

$=8x^2-40x+51$

（オ） $(g\circ h)(x)=g(h(x))=-2(2x^2+1)+3=-4x^2+1$

$(f\circ(g\circ h))(x)=(-4x^2+1)-1=-4x^2$

(2) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=-\{f(x)\}^2+4\{f(x)\}=-\{f(x)-2\}^2+4$

また　$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqq -1$

$f(x)$ の定義域は実数全体であるから，$(g\circ f)(x)$ の定義域も実数全体である。

$f(x)=t$ とおくと　$t\geqq -1$

$u=(g\circ f)(x)$ とすると　$u=-(t-2)^2+4$　したがって　$u\leqq 4$

よって，$(g\circ f)(x)$ の定義域は実数全体，値域は $y\leqq 4$

2 a，b，c，k は実数の定数で，$a\neq 0$，$k\neq 0$ とする。2 つの関数

$$f(x)=ax^3+bx+c,\quad g(x)=2x^2+k$$

に対して，合成関数に関する等式 $g(f(x))=f(g(x))$ がすべての x について成り立つとする。このとき，a，b，c，k の値を求めよ。

解答 $a=4$，$b=-3$，$c=0$，$k=-1$

解説

$g(f(x))=f(g(x))$ が成り立つから

$2(ax^3+bx+c)^2+k=a(2x^2+k)^3+b(2x^2+k)+c$

ゆえに　$2(a^2x^6+b^2x^2+c^2+2abx^4+2bcx+2cax^3)+k$

$=a(8x^6+12kx^4+6k^2x^2+k^3)+2bx^2+bk+c$

よって　$2a^2x^6+4abx^4+4cax^3+2b^2x^2+4bcx+2c^2+k$

$=8ax^6+12akx^4+(6ak^2+2b)x^2+ak^3+bk+c$　…… [A]

これが x の恒等式であるから，両辺の係数を比較して

$2a^2=8a$ …… ①，$4ab=12ak$ …… ②，

$4ca=0$ …… ③，$2b^2=6ak^2+2b$ …… ④，

$4bc=0$ …… ⑤，$2c^2+k=ak^3+bk+c$ …… ⑥

① において，$a\neq 0$ であるから　$a=4$

ゆえに，③ から　$c=0$　このとき，⑤ は成り立つ。

$a=4$ と ② から　$b=3k$　よって，④ から　$18k^2=24k^2+6k$

$k\neq 0$ であるから　$k=-1$　ゆえに　$b=-3$

このとき，⑥ は成り立つ。

以上から　$a=4$，$b=-3$，$c=0$，$k=-1$

参考 求めた a，b，c，k の値を [A] の左辺または右辺に代入すると

$g(f(x))=f(g(x))=32x^6-48x^4+18x^2-1$

3 3 次関数 $f(x)=x^3+bx+c$ に対し，$g(f(x))=f(g(x))$ を満たすような 1 次関数 $g(x)$ をすべて求めよ。

解答 $c\neq 0$ のとき $g(x)=x$，$c=0$ のとき $g(x)=x$ または $g(x)=-x$

解説

$g(x)$ は 1 次関数であるから，$g(x)=px+q$ $(p\neq 0)$ とする。

$g(f(x))=pf(x)+q=p(x^3+bx+c)+q$

$=px^3+bpx+cp+q$

$f(g(x))=\{g(x)\}^3+bg(x)+c=(px+q)^3+b(px+q)+c$

$=p^3x^3+3p^2qx^2+(3pq^2+bp)x+q^3+bq+c$

$g(f(x))=f(g(x))$ を満たすための条件は

$px^3+bpx+cp+q=p^3x^3+3p^2qx^2+(3pq^2+bp)x+q^3+bq+c$

が x についての恒等式となることである。

両辺の係数を比較して　$p=p^3$ …… ①，$0=3p^2q$ …… ②，

$bp=3pq^2+bp$ …… ③，$cp+q=q^3+bq+c$ …… ④

$p\neq 0$ であるから，② より　$q=0$　このとき，③ は常に成り立つ。

$q=0$ を ④ に代入して　$cp=c$　すなわち　$c(p-1)=0$ …… ⑤

ここで，$p\neq 0$ と ① から　$p^2=1$　ゆえに　$p=\pm 1$

$p=1$ のとき ⑤ は常に成り立つが，$p=-1$ のとき　$c=0$

よって　$c\neq 0$ のとき　$p=1$，　$c=0$ のとき　$p=\pm 1$

したがって　$c\neq 0$ のとき　$g(x)=x$

$c=0$ のとき　$g(x)=x$ または $g(x)=-x$

4 x の関数 $f(x)=ax+1$ $(0<a<1)$ に対し，$f_1(x)=f(x)$，$f_2(x)=f(f_1(x))$，$f_3(x)=f(f_2(x))$，……，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$ $[n\geqq 2]$ とするとき，$f_n(x)$ を求めよ。

解答 $f_n(x)=a^nx+\dfrac{1-a^n}{1-a}$

解説

$f_1(x)=ax+1$ から

$f_2(x)=f(f_1(x))=a(ax+1)+1=a^2x+a+1$

$f_3(x)=f(f_2(x))=a(a^2x+a+1)+1=a^3x+a^2+a+1$

したがって，自然数 n について

$f_n(x)=a^nx+a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots\cdots+a+1$ …… ①

であると推測できる。これを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき　$f_1(x)=ax+1$ であるから，① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき　① が成り立つ，すなわち

$f_k(x)=a^kx+a^{k-1}+a^{k-2}+\cdots\cdots+a+1$ であると仮定すると

$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))=af_k(x)+1=a^{k+1}x+a^k+a^{k-1}+\cdots\cdots+a+1$

よって，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

したがって　$f_n(x)=a^nx+a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots\cdots+a+1=a^nx+\dfrac{1-a^n}{1-a}$

5 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ $(x\neq 0)$ とする。

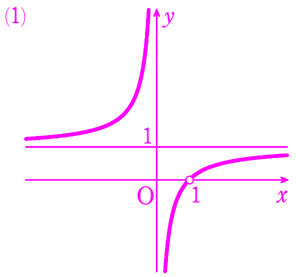
(1) $f(f(x))$ を求めよ。また，$y=f(f(x))$ のグラフの概形をかけ。

(2) 直線 $y=bx+a$ と曲線 $y=f(f(x))$ が共有点をもたないとき，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。

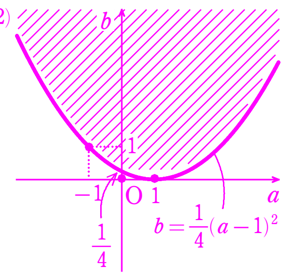
解答 (1) $f(f(x))=-\dfrac{1}{x}+1$ $(x\neq 1)$，[図] ただし，点 $(1,\ 0)$ を除く

(2) [図] 斜線部分と原点。ただし，境界線上の点は 2 点 $(-1,\ 1)$，$(1,\ 0)$ のみを含み，他は含まない

(1)



(2)



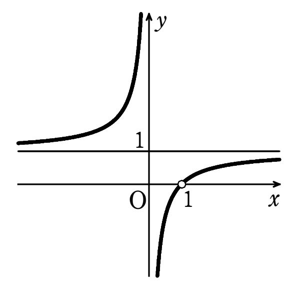
解説

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ から　$x\neq 1$

$f(f(x))=\dfrac{1}{1-f(x)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{1-x}{-x}$

$=-\dfrac{1}{x}+1$ $(x\neq 1)$

グラフは右の図のようになる。



(2) 共有点をもたないのは，次の [1] ～ [3] の場合である。

[1] 直線 $y=bx+a$ と曲線 $y=-\dfrac{1}{x}+1$ が，共有点をもたない

[2] 直線 $y=bx+a$ が点 $(1,\ 0)$ を通り，y 軸に垂直である

[3] 直線 $y=bx+a$ が点 $(1,\ 0)$ において，曲線 $y=-\dfrac{1}{x}+1$ と接する

[1] のとき

直線と曲線は共有点をもたないから，$bx+a=-\dfrac{1}{x}+1$ すなわち

$bx^2+(a-1)x+1=0$ が実数解をもたない。

このための条件は

(i) $b\neq 0$ のとき，2 次方程式 $bx^2+(a-1)x+1=0$ の判別式を D とすると　$D<0$

よって　$(a-1)^2-4\cdot b\cdot 1<0$　すなわち　$(a-1)^2<4b$

(ii) $b=0$ のとき　$a-1=0$　ゆえに　$a=1$

[2] のとき　$0=b\cdot 1+a$ かつ $b=0$　ゆえに　$a=0$，$b=0$

[3] のとき　$0=b\cdot 1+a$ から　$a=-b$

$bx-b=-\frac{1}{x}+1$ とすると　　$bx^2-(b+1)x+1=0$

$b \neq 0$ から，この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=0$

よって　　$\{-(b+1)\}^2-4\cdot b\cdot 1=0$

ゆえに　　$(b-1)^2=0$

よって　　$b=1$，$a=-1$

[1] ～ [3] から，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は右の図の斜線部分 (境界線上の点を含まない)，および点 $(-1,\ 1)$，$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$