数学演習（逆関数）R２．２．１９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1 次の関数の逆関数を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=-2x+1$　(2) $y=\dfrac{x-2}{x-3}$　(3) $y=-\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ $(x\geqq 0)$

(4) $y=-\sqrt{2x-5}$　(5) $y=\log_3(x+2)$ $(1\leqq x\leqq 7)$

2 (1) $a\fallingdotseq 0$ とする。関数 $f(x)=2ax-5a^2$ について，$f^{-1}(x)$ と $f(x)$ が一致するような定数 a の値を求めよ。

(2) 関数 $y=\dfrac{ax+b}{x+2}$ $(b\fallingdotseq 2a)$ のグラフは点 $(1,\ 1)$ を通り，また，この関数の逆関数はもとの関数と一致する。定数 a，b の値を求めよ。

3 $f(x)=x^2-2x+k$ $(x\geqq 1)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。$y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフが異なる２点を共有するとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。$y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフの共有点の座標を求めよ。

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (a，b，c，d は実数，$c \fallingdotseq 0$) がある。

(1) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在するための条件を求めよ。

(2) (1) の条件が満たされるとき，常に $f^{-1}(x)=f(x)$ が成り立つための条件を求めよ。

$\boxed{6}$ x の関数 $f(x)=a-\dfrac{3}{2^x+1}$ を考える。ただし，a は実数の定数である。

(1) $a=\boxed{}$ のとき，$f(-x)=-f(x)$ が常に成り立つ。

(2) a が (1) の値のとき，$f(x)$ の逆関数は $f^{-1}(x)=\log_2\boxed{}$ である。

$\boxed{1}$ 次の関数の逆関数を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=-2x+1$　　(2) $y=\dfrac{x-2}{x-3}$　　(3) $y=-\dfrac{1}{2}(x^2-1)\ (x\geqq 0)$

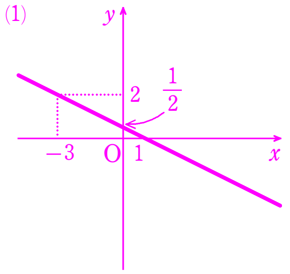
(4) $y=-\sqrt{2x-5}$　　(5) $y=\log_3(x+2)\ (1\leqq x\leqq 7)$

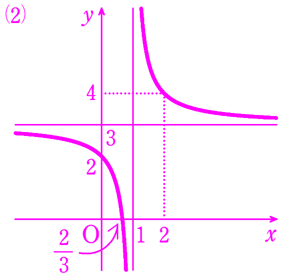
解答 (1) $y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$，[図] 実線部分　(2) $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$，[図] 実線部分

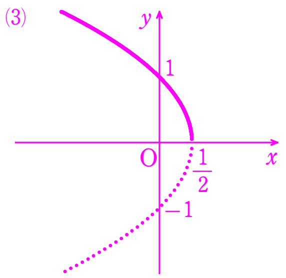
(3) $y=\sqrt{1-2x}\ \left(x\leqq\dfrac{1}{2}\right)$，[図] 実線部分

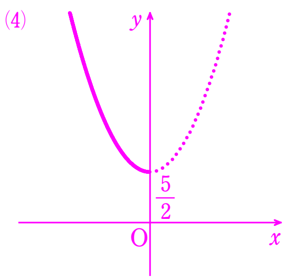
(4) $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5}{2}\ (x\leqq 0)$，[図] 実線部分

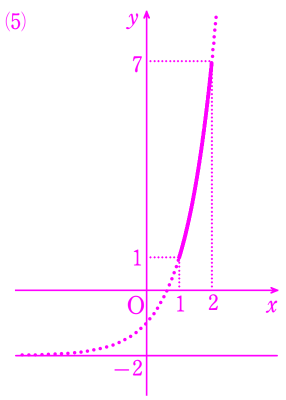
(5) $y=3^x-2\ (1\leqq x\leqq 2)$，[図] 実線部分

(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


解説

(1) $y=-2x+1$ ……① の値域は，実数全体である。

① を x について解くと　$x=-\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{2}$

求める逆関数は，x と y を入れ替えて　$y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$

グラフは，図 (1) の実線部分。

(2) $y=\dfrac{x-2}{x-3}$ ……① から　$y=\dfrac{1}{x-3}+1$

① の値域は　$y\neq 1$

① を x について解くと　$(y-1)x=3y-2$

$y\neq 1$ であるから　$x=\dfrac{3y-2}{y-1}$

求める逆関数は，x と y を入れ替えて　$y=\dfrac{3x-2}{x-1}$

$\dfrac{3x-2}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+3$ であるから，グラフは，図 (2) の実線部分。

(3) $y=-\dfrac{1}{2}(x^2-1)\ (x\geqq 0)$ ……① の値域は　$y\leqq\dfrac{1}{2}$

① を x について解くと　$x=\sqrt{1-2y}$

求める逆関数は，x と y を入れ替えて　$y=\sqrt{1-2x}\ \left(x\leqq\dfrac{1}{2}\right)$

グラフは，図 (3) の実線部分。

(4) $y=-\sqrt{2x-5}$ ……① の値域は　$y\leqq 0$

① を x について解くと　$x=\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{5}{2}$

求める逆関数は，x と y を入れ替えて　$y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5}{2}\ (x\leqq 0)$

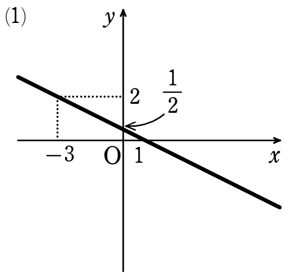
グラフは，図 (4) の実線部分。

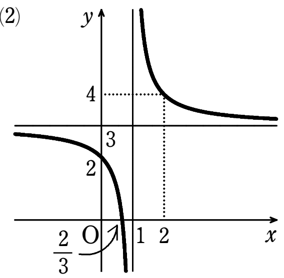
(5) $y=\log_3(x+2)\ (1\leqq x\leqq 7)$ ……① の値域は　$1\leqq y\leqq 2$

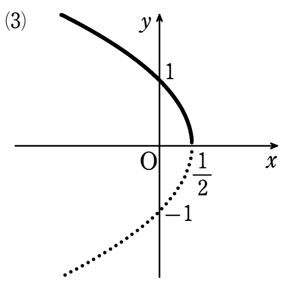
① を x について解くと　$x=3^y-2$

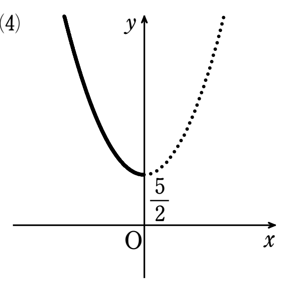
求める逆関数は，x と y を入れ替えて　$y=3^x-2\ (1\leqq x\leqq 2)$

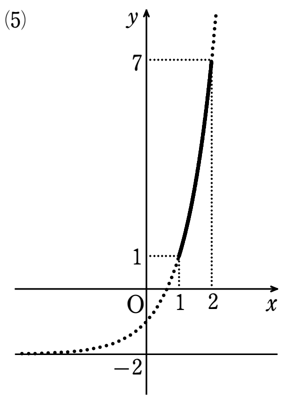
グラフは，図 (5) の実線部分。

(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


$\boxed{2}$ (1) $a\neq 0$ とする。関数 $f(x)=2ax-5a^2$ について，$f^{-1}(x)$ と $f(x)$ が一致するような定数 a の値を求めよ。

(2) 関数 $y=\dfrac{ax+b}{x+2}\ (b\neq 2a)$ のグラフは点 $(1,\ 1)$ を通り，また，この関数の逆関数はもとの関数と一致する。定数 a，b の値を求めよ。

解答 (1) $a=-\dfrac{1}{2}$　(2) $a=-2$，$b=5$

解説

(1) $y=2ax-5a^2$ ……① として，① を x について解くと，$a\neq 0$ であるから

$$x=\frac{y}{2a}+\frac{5}{2}a$$

よって，$f(x)$ の逆関数は　$f^{-1}(x)=\dfrac{x}{2a}+\dfrac{5}{2}a$

$f^{-1}(x)$ と $f(x)$ が一致するための条件は，$\dfrac{x}{2a}+\dfrac{5}{2}a=2ax-5a^2$ が x の恒等式となることである。

両辺の係数を比較して　$\dfrac{1}{2a}=2a$ ……②，$\dfrac{5}{2}a=-5a^2$ ……③

$a\neq 0$ であるから，③ より　$a=-\dfrac{1}{2}$　これは ② を満たす。

(2) $y=\dfrac{ax+b}{x+2}$ ……① とする。

① のグラフは点 $(1,\ 1)$ を通るから　$1=\dfrac{a\cdot 1+b}{1+2}$

ゆえに　$a+b=3$　よって　$b=3-a$ ……②

$\dfrac{ax+b}{x+2}=\dfrac{b-2a}{x+2}+a$ であるから，① の値域は　$y\neq a$

① から　$y(x+2)=ax+b$　ゆえに　$x(y-a)=-2y+b$

$y\neq a$ であるから　$x=\dfrac{-2y+b}{y-a}$

よって，① の逆関数は　$y=\dfrac{-2x+b}{x-a}\ (x\neq a)$ ……③

① と ③ が一致するための条件は，$\dfrac{ax+b}{x+2}=\dfrac{-2x+b}{x-a}$ ……④ が x の恒等式となることである。

④ の分母を払って　$(ax+b)(x-a)=(-2x+b)(x+2)$

ゆえに　$ax^2+(-a^2+b)x-ab=-2x^2+(-4+b)x+2b$

両辺の係数を比較して　$a=-2$，$-a^2+b=-4+b$，$-ab=2b$

$a=-2$ は第 2 式，第 3 式を満たし，このとき，② から　$b=5$

したがって，求める a，b の値は　$a=-2$，$b=5$

このとき，① と ③ の定義域はともに $x\neq-2$ となり一致する。

別解　$y=f(x)$ とする。$f(x)$ の値域は $y\neq a$ であるから，逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域は
$x\neq a$

$f^{-1}(x)=f(x)$ であるとき，$f(x)$ の定義域 $x\neq-2$ が $x\neq a$ に一致するから
$a=-2$

また，$y=f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 1)$ を通るから　$f(1)=1$

ゆえに　$a+b=3$　$a=-2$ を代入して　$b=5$

$a=-2$，$b=5$ のとき，$f(x)=\dfrac{-2x+5}{x+2}$ とその逆関数は一致する。

3 $f(x)=x^2-2x+k$ $(x\geqq1)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。$y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフが異なる 2 点を共有するとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

解答　$2\leqq k<\dfrac{9}{4}$

解説

共有点の座標を $(x,\ y)$ とすると　$y=f(x)$ かつ $y=f^{-1}(x)$

$y=f^{-1}(x)$ より $x=f(y)$ であるから，次の連立方程式を考える。

$y=x^2-2x+k$ $(x\geqq1)$　……①，

$x=y^2-2y+k$ $(y\geqq1)$　……②

①－② から　$y-x=(x+y)(x-y)-2(x-y)$

したがって　$(x-y)(x+y-1)=0$

$x\geqq1$，$y\geqq1$ であるから　$x+y-1\geqq1$　ゆえに　$x=y$

よって，求める条件は，$x=x^2-2x+k$ すなわち $x^2-3x+k=0$ が $x\geqq1$ の異なる 2 つの実数解をもつことである。

$g(x)=x^2-3x+k$ とし，$g(x)=0$ の判別式を D とすると

[1]　$D>0$ から　$(-3)^2-4\cdot1\cdot k>0$　よって　$9-4k>0$

ゆえに　$k<\dfrac{9}{4}$　……③

[2]　放物線 $y=g(x)$ の軸は直線 $x=\dfrac{3}{2}$ で，$1<\dfrac{3}{2}$ である。

[3]　$g(1)\geqq0$ から　$1^2-3\cdot1+k\geqq0$　よって　$k\geqq2$　……④

③，④ の共通範囲をとって　$2\leqq k<\dfrac{9}{4}$

4 関数 $f(x)=\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。$y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフの共有点の座標を求めよ。

解答　$(1,\ 1)$，$(-2,\ -2)$

解説

求める共有点の座標を $(x,\ y)$ とすると　$y=f(x)$ かつ $y=f^{-1}(x)$

$y=f(x)$ から　$6y=x^3+3x+2$　……①

$y=f^{-1}(x)$ から　$x=f(y)$　よって　$6x=y^3+3y+2$　……②

①－② から　$6(y-x)=(x-y)(x^2+xy+y^2)+3(x-y)$

よって　$(x-y)(x^2+xy+y^2+9)=0$

ゆえに　$y=x$　または　$x^2+xy+y^2+9=0$

$y=x$ のとき，これを ① に代入して　$6x=x^3+3x+2$

よって　$x^3-3x+2=0$

ゆえに　$(x-1)^2(x+2)=0$　よって　$x=1,\ -2$

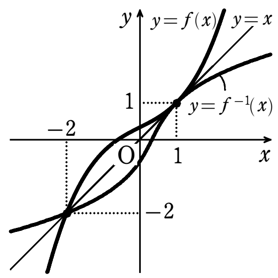
$x=1$ のとき　$y=1$，　$x=-2$ のとき　$y=-2$

$x^2+xy+y^2+9=0$ のとき，これを変形すると

$\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2=-9$

この等式を満たす実数の組 $(x,\ y)$ はない。

以上から，求める共有点の座標は　$(1,\ 1)$，$(-2,\ -2)$



5 関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (a，b，c，d は実数，$c\neq0$) がある。

(1)　$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在するための条件を求めよ。

(2)　(1) の条件が満たされるとき，常に $f^{-1}(x)=f(x)$ が成り立つための条件を求めよ。

解答　(1)　$ad-bc\neq0$　(2)　$a+d=0$

解説

(1)　$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ……① とすると，$c\neq0$ であるから

$y=\dfrac{b-\dfrac{ad}{c}}{cx+d}+\dfrac{a}{c}$　……②

$f^{-1}(x)$ が存在するための条件は，y が定数関数にならないことであるから

$b-\dfrac{ad}{c}\neq0$　すなわち　$ad-bc\neq0$

(2)　$ad-bc\neq0$ のとき，① から　$(cx+d)y=ax+b$

ゆえに　$(cy-a)x=-dy+b$

ここで，② より，$y\neq\dfrac{a}{c}$ すなわち $cy-a\neq0$ であるから　$x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$

x と y を入れ替えて　$y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$　すなわち　$f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$　……③

$f^{-1}(x)=f(x)$ とすると　$\dfrac{-dx+b}{cx-a}=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

分母を払うと　$-(dx-b)(cx+d)=(ax+b)(cx-a)$

よって　$(ax+b)(cx-a)+(cx+d)(dx-b)=0$

$acx^2-a^2x+bcx-ab+cdx^2-bcx+d^2x-bd=0$

$(ac+cd)x^2-(a^2-d^2)x-ab-bd=0$

ゆえに　$c(a+d)x^2-(a+d)(a-d)x-b(a+d)=0$

よって　$(a+d)\{cx^2-(a-d)x-b\}=0$

これが x の恒等式となるための条件は，$c\neq0$ から　$a+d=0$

このとき，① と ③ の定義域はともに $x\neq\dfrac{a}{c}$ となり，一致する。

6 x の関数 $f(x)=a-\dfrac{3}{2^x+1}$ を考える。ただし，a は実数の定数である。

(1)　$a=\boxed{}$ のとき，$f(-x)=-f(x)$ が常に成り立つ。

(2)　a が (1) の値のとき，$f(x)$ の逆関数は $f^{-1}(x)=\log_2\boxed{}$ である。

解答　(1)　$\dfrac{3}{2}$　(2)　$\dfrac{3+2x}{3-2x}$

解説

(1)　$f(-x)=a-\dfrac{3}{2^{-x}+1}=a-\dfrac{3\cdot2^x}{2^x+1}$

$f(-x)=-f(x)$ とすると　$a-\dfrac{3\cdot2^x}{2^x+1}=-a+\dfrac{3}{2^x+1}$

よって　$2a=\dfrac{3(2^x+1)}{2^x+1}$　ゆえに，$2a=3$ から　$a=\dfrac{3}{2}$

(2)　$a=\dfrac{3}{2}$ のとき　$f(x)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2^x+1}$

$y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2^x+1}$ とおくと　$\dfrac{3}{2^x+1}=\dfrac{3}{2}-y$

この式から，$y\neq\dfrac{3}{2}$ であり　$\dfrac{2^x+1}{3}=\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}-y}$

よって　$2^x+1=\dfrac{3\cdot2}{3-2y}$　ゆえに　$2^x=\dfrac{6}{3-2y}-1$

よって　$2^x=\dfrac{3+2y}{3-2y}$　ゆえに　$x=\log_2\dfrac{3+2y}{3-2y}$

したがって，$f(x)$ の逆関数は　$f^{-1}(x)=\log_2\dfrac{3+2x}{3-2x}$