数学演習（無理関数）Ｒ２．２．１９　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ (1) 次の関数のグラフをかけ。また，値域を求めよ。

(ア) $y=\sqrt{3x-4}$　　(イ) $y=\sqrt{-2x+4}$ $(-2 \leqq x \leqq 1)$

(ウ) $y=\sqrt{2-x}-1$

(2) 関数 $y=\sqrt{2x+4}$ $(a \leqq x \leqq b)$ の値域が $1 \leqq y \leqq 3$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{2}$ (1) 直線 $y=8x-2$ と関数 $y=\sqrt{16x-1}$ のグラフの共有点の座標を求めよ。

(2) 次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ。

(ア) $\sqrt{3-x}>x-1$　　(イ) $x+2 \leqq \sqrt{4x+9}$　　(ウ) $\sqrt{x}+x<6$

$\boxed{3}$ 方程式 $2\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{2}x+k$ の実数解の個数を，定数 k の値によって調べよ。

$\boxed{4}$ $-4 \leqq x \leqq a$ のとき，$y=\sqrt{9-4x}+b$ の最大値が 6，最小値が 4 であるとする。このとき，

$a=$ ${}^{ア}\boxed{}$，$b=$ ${}^{イ}\boxed{}$ である。

1 (1)　次の関数のグラフをかけ。また，値域を求めよ。

（ア）　$y=\sqrt{3x-4}$　　（イ）　$y=\sqrt{-2x+4}$　$(-2\leqq x\leqq 1)$

（ウ）　$y=\sqrt{2-x}-1$

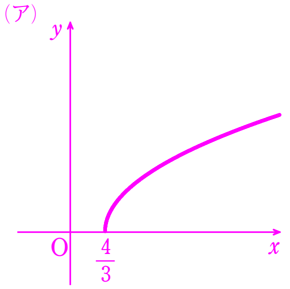
(2)　関数 $y=\sqrt{2x+4}$　$(a\leqq x\leqq b)$ の値域が $1\leqq y\leqq 3$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　(1)　（ア）［図］；$y\geqq 0$　　（イ）［図］実線部分；$\sqrt{2}\leqq y\leqq 2\sqrt{2}$

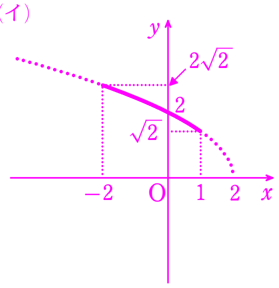
（ウ）［図］；$y\geqq -1$

(2)　$a=-\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{5}{2}$

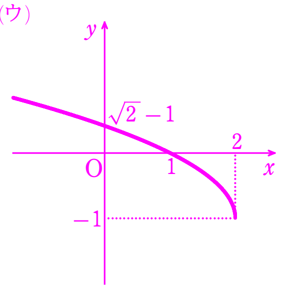
（ア）



（イ）



（ウ）



解説

(1)　（ア）　$y=\sqrt{3x-4}$ から　　$y=\sqrt{3\left(x-\dfrac{4}{3}\right)}$

このグラフは $y=\sqrt{3x}$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{4}{3}$ だけ平行移動したもので，図(ア)のようになる。

また，値域は　　$y\geqq 0$

（イ）　$y=\sqrt{-2x+4}$ から　　$y=\sqrt{-2(x-2)}$

このグラフは $y=\sqrt{-2x}$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，$-2\leqq x\leqq 1$ のときのグラフは図(イ)の実線部分のようになる。

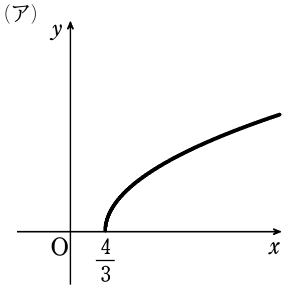
また，値域は　　$\sqrt{2}\leqq y\leqq 2\sqrt{2}$

（ウ）　$y=\sqrt{2-x}-1$ から　　$y=\sqrt{-(x-2)}-1$

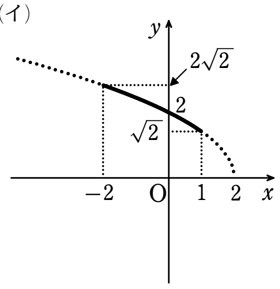
このグラフは $y=\sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，図(ウ)のようになる。

また，値域は　　$y\geqq -1$

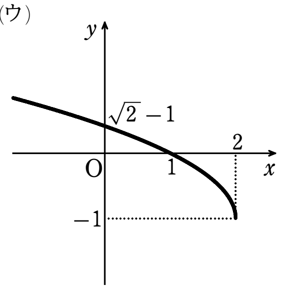
（ア）



（イ）



（ウ）



(2)　関数 $y=\sqrt{2x+4}$　$(a\leqq x\leqq b)$ は単調に増加するから，値域は

$\sqrt{2a+4}\leqq y\leqq\sqrt{2b+4}$

これが $1\leqq y\leqq 3$ であるための条件は　　$\sqrt{2a+4}=1$，$\sqrt{2b+4}=3$

それぞれの両辺を平方して　　$2a+4=1$，$2b+4=9$

これを解いて　　$a=-\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{5}{2}$

2 (1)　直線 $y=8x-2$ と関数 $y=\sqrt{16x-1}$ のグラフの共有点の座標を求めよ。

(2)　次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ。

（ア）　$\sqrt{3-x}>x-1$　　（イ）　$x+2\leqq\sqrt{4x+9}$　　（ウ）　$\sqrt{x}+x<6$

解答　(1)　$\left(\dfrac{5}{8},\ 3\right)$　　(2)　（ア）　$x<2$　　（イ）　$-\dfrac{9}{4}\leqq x\leqq\sqrt{5}$　　（ウ）　$0\leqq x<4$

解説

(1)　$8x-2=\sqrt{16x-1}$ ……① とし，両辺を平方すると　　$(8x-2)^2=16x-1$

整理して　　$64x^2-48x+5=0$

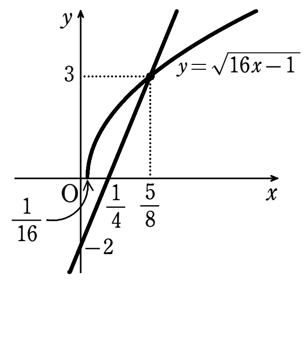
よって　　$(8x-1)(8x-5)=0$

ゆえに　　$x=\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{5}{8}$

グラフから ① を満たすものは　　$x=\dfrac{5}{8}$

このとき　　$y=3$

したがって，共有点の座標は　　$\left(\dfrac{5}{8},\ 3\right)$



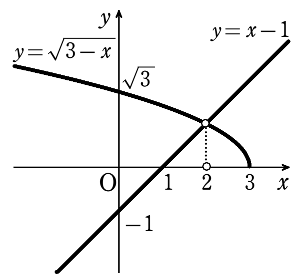
(2)　（ア）　$\sqrt{3-x}=x-1$ ……① として，両辺を平方すると　　$3-x=x^2-2x+1$

整理して　　$x^2-x-2=0$

よって　　$x=-1$，2

① を満たすものは　　$x=2$

グラフから，不等式の解は　　$x<2$



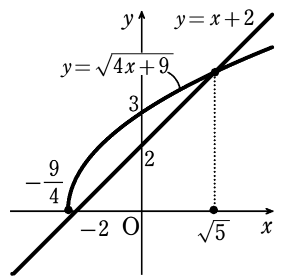
（イ）　$x+2=\sqrt{4x+9}$ ……② として，両辺を平方すると　　$x^2+4x+4=4x+9$

整理して　　$x^2-5=0$

よって　　$x=\pm\sqrt{5}$

② を満たすものは　　$x=\sqrt{5}$

グラフから，不等式の解は　　$-\dfrac{9}{4}\leqq x\leqq\sqrt{5}$



（ウ）　$\sqrt{x}+x=6$ とすると　　$\sqrt{x}=6-x$ ……③

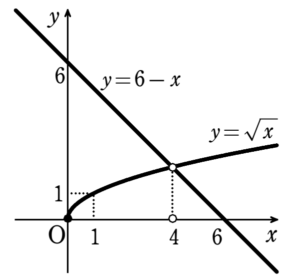
両辺を平方して　　$x=(6-x)^2$

ゆえに　　$x^2-13x+36=0$

よって　　$x=4$，9

③ を満たすものは　　$x=4$

グラフから，不等式の解は　　$0\leqq x<4$



3　方程式 $2\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{2}x+k$ の実数解の個数を，定数 k の値によって調べよ。

解答　$-\dfrac{1}{2}\leqq k<\dfrac{3}{2}$ のとき 2 個；$k<-\dfrac{1}{2}$，$k=\dfrac{3}{2}$ のとき 1 個；

$\dfrac{3}{2}<k$ のとき 0 個

解説

$y=2\sqrt{x-1}$ ……①，　$y=\dfrac{1}{2}x+k$ ……②

とすると，① のグラフと直線 ② の共有点の個数が，与えられた方程式の実数解の個数に一致する。

方程式から　　$4\sqrt{x-1}=x+2k$

両辺を平方して　　$16(x-1)=(x+2k)^2$

整理すると　　$x^2+2(2k-8)x+4k^2+16=0$

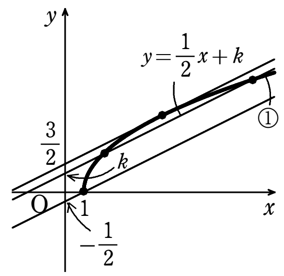
判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2k-8)^2-(4k^2+16)=-32k+48=-16(2k-3)$$

$D=0$ とすると　　$2k-3=0$　　ゆえに　　$k=\dfrac{3}{2}$

このとき，① のグラフと直線 ② は接する。

また，直線 ② が ① のグラフの端の点 $(1,\ 0)$ を通るとき



$$0=\frac{1}{2}+k \quad \text{すなわち} \quad k=-\frac{1}{2}$$

したがって，求める実数解の個数は

$-\frac{1}{2}\leqq k<\frac{3}{2}$ のとき　2個；　$k<-\frac{1}{2}$，$k=\frac{3}{2}$ のとき　1個；

$\frac{3}{2}<k$ のとき　0個

$\boxed{4}$ $-4\leqq x\leqq a$ のとき，$y=\sqrt{9-4x}+b$ の最大値が 6，最小値が 4 であるとする。このとき，

$a=$ ア$\boxed{}$，$b=$ イ$\boxed{}$ である。

解答　（ア）0　（イ）1

解説

$y=\sqrt{9-4x}+b$ は減少関数であるから

$x=-4$ のとき最大となり　$\sqrt{9+16}+b=6$　……①

$x=a$　のとき最小となり　$\sqrt{9-4a}+b=4$　……②

① から　$b=1$　② に代入して　$\sqrt{9-4a}=3$

両辺を平方して　$9-4a=9$　よって　$a=0$

したがって　$a=$ ア0，$b=$ イ1