数学演習（分数関数）Ｒ２．２．１７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ (1)　次の関数のグラフをかけ。また，漸近線を求めよ。

（ア）　$y=\dfrac{3x+5}{x+1}$　　（イ）　$y=\dfrac{-2x+5}{x-3}$　　（ウ）　$y=\dfrac{x-2}{2x+1}$

(2)　(1)の(ア)，(イ)の各関数において，定義域が $2\leqq x\leqq 4$ のとき，値域を求めよ。

$\boxed{2}$ (1)　関数 $y=\dfrac{3x+17}{x+4}$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{x+8}{x+3}$ のグラフをどのように平行移動したものか。

(2)　関数 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ のグラフが，2 直線 $x=3$ と $y=1$ を漸近線とし，更に点 $(2,\ 2)$ を通るとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

$\boxed{3}$ (1)　関数 $y=\dfrac{2}{x+3}$ のグラフと直線 $y=x+4$ の共有点の座標を求めよ。

(2)　不等式 $\dfrac{2}{x+3}<x+4$ を解け。

$\boxed{4}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\dfrac{2}{x(x+2)}-\dfrac{x}{2(x+2)}=0$　　(2) $\dfrac{3-2x}{x-4}\leqq x$

$\boxed{5}$ k は定数とする。方程式 $\dfrac{x-5}{x-2}=3x+k$ の実数解の個数を調べよ。

$\boxed{6}$ 座標平面において，曲線 $y=-\dfrac{5}{4x}$ を x 軸方向に $-\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に $\dfrac{3}{2}$ だけ平行移動した曲線を C_1 とすると，C_1 の方程式は，$y=$ ア $\boxed{}$ である。また，曲線 C_1 を y 軸に関して対称移動した曲線を C_2 とすると，C_2 の方程式は，$y=$ イ $\boxed{}$ である。次に，曲線 C_1 を原点に関して対称移動した曲線を C_3 とすると，C_3 の方程式は，$y=$ ウ $\boxed{}$ である。

1 (1) 次の関数のグラフをかけ。また，漸近線を求めよ。

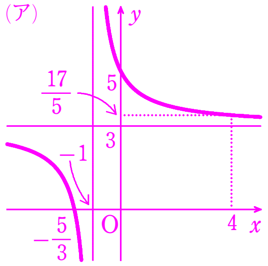
（ア）$y=\frac{3x+5}{x+1}$　　（イ）$y=\frac{-2x+5}{x-3}$　　（ウ）$y=\frac{x-2}{2x+1}$

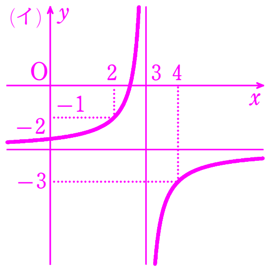
(2) (1)の（ア），（イ）の各関数において，定義域が $2\leqq x\leqq 4$ のとき，値域を求めよ。

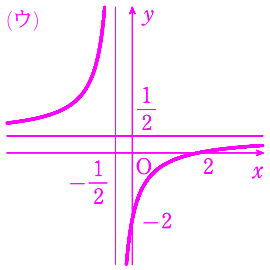
解答 (1)（ア）[図]；2直線 $x=-1$，$y=3$　（イ）[図]；2直線 $x=3$，$y=-2$

（ウ）[図]；2直線 $x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$

(2)（ア）$\frac{17}{5}\leqq y\leqq\frac{11}{3}$　（イ）$y\leqq -3$，$-1\leqq y$







解説

(1)（ア）$y=\frac{3x+5}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+3$

この関数のグラフは $y=\frac{2}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 3 だけ平行移動したもので，図（ア）のようになる。

漸近線は　2直線 $x=-1$，$y=3$

（イ）$y=\frac{-2x+5}{x-3}=\frac{-2(x-3)-1}{x-3}=-\frac{1}{x-3}-2$

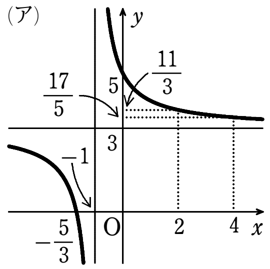
この関数のグラフは $y=-\frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動したもので，図（イ）のようになる。

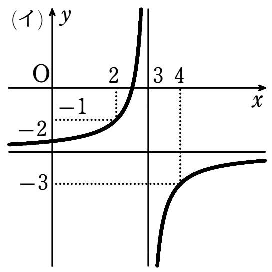
漸近線は　2直線 $x=3$，$y=-2$

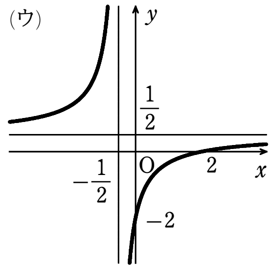
（ウ）$y=\frac{x-2}{2x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)-5}{2x+1}=-\frac{\frac{5}{4}}{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}$

この関数のグラフは $y=-\frac{5}{4x}$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{1}{2}$，y 軸方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動したもので，図（ウ）のようになる。

漸近線は　2直線 $x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$







(2)（ア）$x=2$ のとき　$y=\frac{11}{3}$，　$x=4$ のとき　$y=\frac{17}{5}$

(1)の図（ア）のグラフから，値域は　$\frac{17}{5}\leqq y\leqq\frac{11}{3}$

（イ）$x=2$ のとき　$y=-1$，　$x=4$ のとき　$y=-3$

(1)の図（イ）のグラフから，値域は　$y\leqq -3$，$-1\leqq y$

2 (1) 関数 $y=\frac{3x+17}{x+4}$ のグラフは，関数 $y=\frac{x+8}{x+3}$ のグラフをどのように平行移動したものか。

(2) 関数 $y=\frac{ax+b}{x+c}$ のグラフが，2直線 $x=3$ と $y=1$ を漸近線とし，更に点 $(2,\ 2)$ を通るとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

解答 (1) x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したもの

(2) $a=1$，$b=-4$，$c=-3$

解説

(1) $y=\frac{3x+17}{x+4}=\frac{3(x+4)+5}{x+4}=\frac{5}{x+4}+3$　……①

$y=\frac{x+8}{x+3}=\frac{(x+3)+5}{x+3}=\frac{5}{x+3}+1$　……②

②のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したときに①のグラフに重なるとすると，漸近線に着目して

$-3+p=-4$，$1+q=3$　　ゆえに　$p=-1$，$q=2$

よって　x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したもの

(2) 2直線 $x=3$，$y=1$ が漸近線であるから，この関数は $y=\frac{k}{x-3}+1$ と表される。

このグラフが点 $(2,\ 2)$ を通るから

$2=\frac{k}{2-3}+1$　　ゆえに　$k=-1$

よって　$y=\frac{-1}{x-3}+1$　すなわち　$y=\frac{x-4}{x-3}$

したがって　$a=1$，$b=-4$，$c=-3$

3 (1) 関数 $y=\frac{2}{x+3}$ のグラフと直線 $y=x+4$ の共有点の座標を求めよ。

(2) 不等式 $\frac{2}{x+3}<x+4$ を解け。

解答 (1) $(-2,\ 2)$，$(-5,\ -1)$　(2) $-5<x<-3$，$-2<x$

解説

$y=\frac{2}{x+3}$ ……①，$y=x+4$ ……② とする。

(1) ①，②から　$\frac{2}{x+3}=x+4$

両辺に $x+3$ を掛けて　$2=(x+4)(x+3)$

整理して　$x^2+7x+10=0$

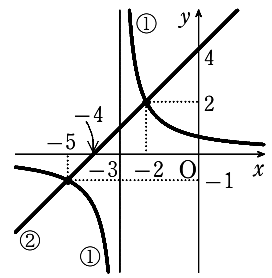
ゆえに　$(x+2)(x+5)=0$

よって　$x=-2,\ -5$

②から　$x=-2$ のとき　$y=2$，

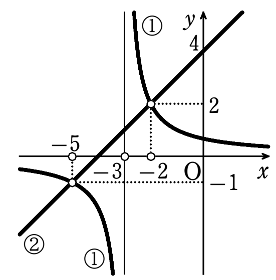
$x=-5$ のとき　$y=-1$

したがって，共有点の座標は　$(-2,\ 2)$，$(-5,\ -1)$



(2) 関数①のグラフが直線②の下側にあるような x の値の範囲は，右の図から

$-5<x<-3$，$-2<x$



4 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\frac{2}{x(x+2)}-\frac{x}{2(x+2)}=0$　　(2) $\frac{3-2x}{x-4}\leqq x$

解答 (1) $x=2$　(2) $-1\leqq x\leqq 3$，$4<x$

解説

(1) 方程式の両辺に $2x(x+2)$ を掛けて　$4-x^2=0$　　よって　$x=\pm 2$

$x=-2$ は，もとの方程式の分母を0にするから解ではない。

したがって　$x=2$

(2) 不等式から　$x-\frac{3-2x}{x-4}\geqq 0$　　ゆえに　$\frac{x^2-2x-3}{x-4}\geqq 0$

よって　$\frac{(x+1)(x-3)}{x-4}\geqq 0$

左辺を P とし，P の符号を調べると，右の表のようになる。

したがって，解は

$-1\leqq x\leqq 3$，$4<x$

x	…	-1	…	3	…	4	…
$x+1$	−	0	+	+	+	+	+
$x-3$	−	−	−	0	+	+	+
$x-4$	−	−	−	−	−	0	+
P	−	0	+	0	−	／	+

別解 1. [1] $x-4>0$ すなわち $x>4$ のとき　$3-2x\leqq x(x-4)$

整理して　$x^2-2x-3\geqq 0$　　よって　$(x+1)(x-3)\geqq 0$

ゆえに　$x\leqq -1$，$3\leqq x$　　$x>4$ であるから　$x>4$

[2] $x-4<0$ すなわち $x<4$ のとき　$3-2x\geqq x(x-4)$

これを解いて　$-1\leqq x\leqq 3$　　$x<4$ であるから　$-1\leqq x\leqq 3$

[1]，[2]から，解は　$-1\leqq x\leqq 3$，$4<x$

別解 2. 不等式の両辺に $(x-4)^2$ を掛けて　$(3-2x)(x-4)\leqq x(x-4)^2$

よって　$(x-4)\{x(x-4)-(3-2x)\}\geqq 0$　　ゆえに　$(x+1)(x-3)(x-4)\geqq 0$

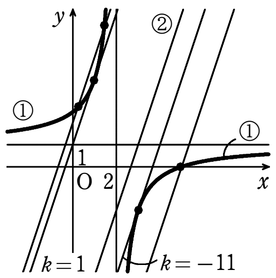
よって　$-1\leqq x\leqq 3$，$4\leqq x$

$x\neq 4$ であるから，求める解は　$-1\leqq x\leqq 3$，$4<x$

$\boxed{5}$ k は定数とする。方程式 $\dfrac{x-5}{x-2}=3x+k$ の実数解の個数を調べよ。

解答　$k<-11$，$1<k$ のとき 2 個；$k=-11$，1 のとき 1 個；$-11<k<1$ のとき 0 個

解説



$y=\dfrac{x-5}{x-2}=-\dfrac{3}{x-2}+1$ ……①

$y=3x+k$ ……②

とすると，双曲線 ① と直線 ② の共有点の個数が，与えられた方程式の実数解の個数に一致する。

$\dfrac{x-5}{x-2}=3x+k$ から　　$x-5=(3x+k)(x-2)$

整理して　　$3x^2+(k-7)x-2k+5=0$

判別式を D とすると

$$D=(k-7)^2-4\cdot3\cdot(-2k+5)=k^2+10k-11=(k+11)(k-1)$$

$D=0$ とすると　　$k=-11,\ 1$

このとき，双曲線 ① と直線 ② は接する。

よって，求める実数解の個数は，図から

$k<-11$，$1<k$ のとき　2 個；　$k=-11$，1 のとき　1 個；

$-11<k<1$　　のとき　0 個

$\boxed{6}$ 座標平面において，曲線 $y=-\dfrac{5}{4x}$ を x 軸方向に $-\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に $\dfrac{3}{2}$ だけ平行移動した曲線を C_1 とすると，C_1 の方程式は，$y=$ ア $\boxed{}$ である。また，曲線 C_1 を y 軸に関して対称移動した曲線を C_2 とすると，C_2 の方程式は，$y=$ イ $\boxed{}$ である。次に，曲線 C_1 を原点に関して対称移動した曲線を C_3 とすると，C_3 の方程式は，$y=$ ウ $\boxed{}$ である。

解答　(ア) $\dfrac{3x-1}{2x+1}$　　(イ) $\dfrac{3x+1}{2x-1}$　　(ウ) $-\dfrac{3x+1}{2x-1}$

解説

(ア)　C_1 の方程式は

$$y=-\frac{5}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}+\frac{3}{2}=-\frac{5}{2(2x+1)}+\frac{3}{2}=\frac{6x-2}{2(2x+1)}=\frac{3x-1}{2x+1}$$

(イ)　C_2 の方程式は　　$y=\dfrac{3(-x)-1}{2(-x)+1}=\dfrac{3x+1}{2x-1}$

(ウ)　C_3 の方程式は，$-y=\dfrac{3(-x)-1}{2(-x)+1}$ から　　$y=-\dfrac{3x+1}{2x-1}$

別解　C_3 は C_2 を x 軸に関して対称に移動した曲線であるから，その方程式は

$-y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$　すなわち　$y=-\dfrac{3x+1}{2x-1}$