数学演習（極座標・極方程式）R２．２．２６

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ (1)　極座標が次のような点の位置を図示せよ。また，直交座標を求めよ。

（ア）$\left(2,\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$　（イ）$\left(3,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$　（ウ）$\left(2,\ \dfrac{17}{6}\pi\right)$　（エ）$\left(4,\ -\dfrac{10}{3}\pi\right)$

(2)　直交座標が次のような点の極座標 $(r,\ \theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を求めよ。

（ア）$(1,\ \sqrt{3})$　（イ）$(-2,\ -2)$　（ウ）$(-3,\ \sqrt{3})$

$\boxed{2}$ O を極とする極座標に関して，3 点 A$\left(6,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$，B$\left(4,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$，C$\left(2,\ -\dfrac{3}{4}\pi\right)$ が与えられているとき，次のものを求めよ。

(1)　線分 AB の長さ　(2)　△OAB の面積　(3)　△ABC の面積

$\boxed{3}$ 極座標に関して，次の円・直線の極方程式を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

(1)　中心が点 $(a,\ \alpha)$ $(0<\alpha<\pi)$ で，極 O を通る円

(2)　点 A $(a,\ 0)$ を通り，始線 OX とのなす角が $\alpha\left(\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$ である直線

$\boxed{4}$ (1)　楕円 $2x^2+3y^2=1$ を極方程式で表せ。

(2)　次の極方程式はどのような曲線を表すか。直交座標の方程式で答えよ。

(ア)　$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{3}\sin\theta$　　(イ)　$r=\cos\theta+\sin\theta$

(ウ)　$r^2(1+3\cos^2\theta)=4$　　(エ)　$r^2\cos 2\theta=r\sin\theta(1-r\sin\theta)+1$

$\boxed{5}$ (1)　極座標において，点 A $(3,\ \pi)$ を通り始線に垂直な直線を g とする。極 O と直線 g からの距離の比が次のように一定である点 P の軌跡の極方程式を求めよ。

(ア)　1：2　　(イ)　1：1

(2)　次の極方程式の表す曲線を，直交座標の方程式で表せ。

(ア)　$r=\dfrac{4}{1-\cos\theta}$　　(イ)　$r=\dfrac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}\cos\theta}$　　(ウ)　$r=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$

$\boxed{6}$ 2 次曲線の 1 つの焦点 F を通る弦の両端を P，Q とするとき，$\dfrac{1}{\mathrm{FP}}+\dfrac{1}{\mathrm{FQ}}$ は，弦の方向に関係なく一定であることを証明せよ。

1 (1) 極座標が次のような点の位置を図示せよ。また，直交座標を求めよ。

(ア) $\left(2,\ \frac{3}{4}\pi\right)$　(イ) $\left(3,\ -\frac{\pi}{2}\right)$　(ウ) $\left(2,\ \frac{17}{6}\pi\right)$　(エ) $\left(4,\ -\frac{10}{3}\pi\right)$

(2) 直交座標が次のような点の極座標 $(r,\ \theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ を求めよ。

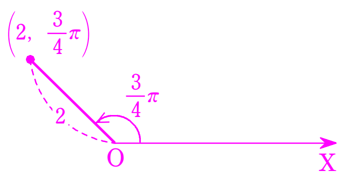
(ア) $(1,\ \sqrt{3})$　(イ) $(-2,\ -2)$　(ウ) $(-3,\ \sqrt{3})$

解答 (1) (ア) [図]；$(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$　(イ) [図]；$(0,\ -3)$

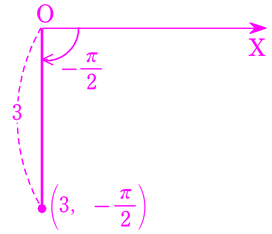
(ウ) [図]；$(-\sqrt{3},\ 1)$　(エ) [図]；$(-2,\ 2\sqrt{3})$

(2) (ア) $\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$　(イ) $\left(2\sqrt{2},\ \frac{5}{4}\pi\right)$　(ウ) $\left(2\sqrt{3},\ \frac{5}{6}\pi\right)$

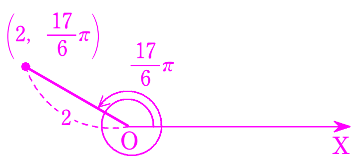
(ア)



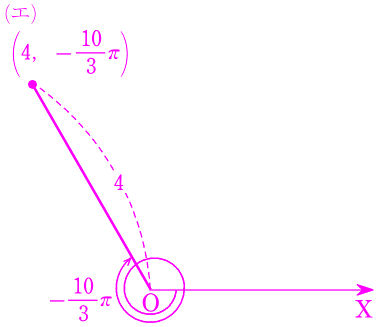
(イ)



(ウ)



(エ)



解説

(1) (ア) 図(ア)　また　$x=2\cos\frac{3}{4}\pi=-\sqrt{2}$，$y=2\sin\frac{3}{4}\pi=\sqrt{2}$

よって，直交座標は　$(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

(イ) 図(イ)　また　$x=3\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$，$y=3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-3$

よって，直交座標は　$(0,\ -3)$

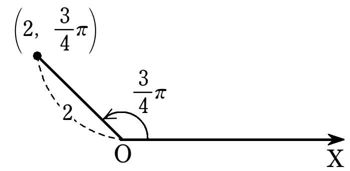
(ウ) 図(ウ)　また　$x=2\cos\frac{17}{6}\pi=-\sqrt{3}$，$y=2\sin\frac{17}{6}\pi=1$

よって，直交座標は　$(-\sqrt{3},\ 1)$

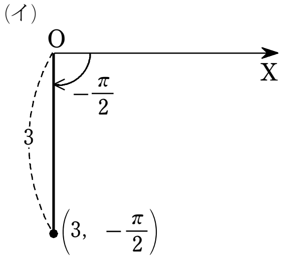
(エ) 図(エ)　また　$x=4\cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right)=-2$，$y=4\sin\left(-\frac{10}{3}\pi\right)=2\sqrt{3}$

よって，直交座標は　$(-2,\ 2\sqrt{3})$

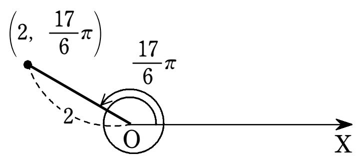
(ア)



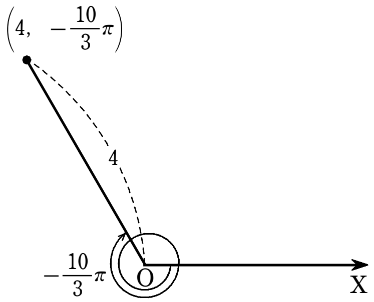
(イ)



(ウ)



(エ)



(2) (ア) $r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$　よって　$\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{3}$　ゆえに　$\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$

(イ) $r=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

よって　$\cos\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{5}{4}\pi$　ゆえに　$\left(2\sqrt{2},\ \frac{5}{4}\pi\right)$

(ウ) $r=\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

よって　$\cos\theta=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

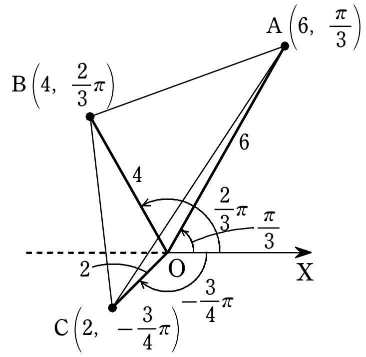
$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{5}{6}\pi$　ゆえに　$\left(2\sqrt{3},\ \frac{5}{6}\pi\right)$

2 O を極とする極座標に関して，3 点 A$\left(6,\ \frac{\pi}{3}\right)$，B$\left(4,\ \frac{2}{3}\pi\right)$，C$\left(2,\ -\frac{3}{4}\pi\right)$ が与えられているとき，次のものを求めよ。

(1) 線分 AB の長さ　(2) △OAB の面積　(3) △ABC の面積

解答 (1) $2\sqrt{7}$　(2) $6\sqrt{3}$　(3) $\frac{5\sqrt{2}+12\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

解説



(1) △OAB において

OA＝6，OB＝4，

$\angle AOB=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

よって，余弦定理により

$AB^2=6^2+4^2-2\cdot6\cdot4\cos\frac{\pi}{3}=28$

ゆえに　$AB=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

(2) △OAB の面積を S_1 とすると

$S_1=\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$

(3) $\angle BOC=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$，$\angle COA=\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}$ で

あるから，△OBC，△OAC の面積をそれぞれ S_2，S_3 とすると

$S_2=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=4\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

$S_3=\frac{1}{2}\cdot6\cdot2\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=6\left(\sin\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$

よって，△ABC の面積を S とすると

$S=S_1+S_2-S_3=6\sqrt{3}+(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}=\frac{5\sqrt{2}+12\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

別解　3 点 A，B，C を直交座標で表すと

A$(3,\ 3\sqrt{3})$，B$(-2,\ 2\sqrt{3})$，C$(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$

ゆえに　$\overrightarrow{AB}=(-5,\ -\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{2}-3,\ -\sqrt{2}-3\sqrt{3})$

よって　$S=\frac{1}{2}\left|-5(-\sqrt{2}-3\sqrt{3})-(-\sqrt{3})(-\sqrt{2}-3)\right|=\frac{5\sqrt{2}+12\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

3 極座標に関して，次の円・直線の極方程式を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

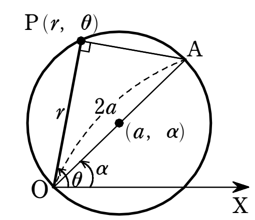
(1) 中心が点 $(a,\ \alpha)$ $(0<\alpha<\pi)$ で，極 O を通る円

(2) 点 A$(a,\ 0)$ を通り，始線 OX とのなす角が α $\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$ である直線

解答 (1) $r=2a\cos(\theta-\alpha)$　(2) $r\sin(\theta-\alpha)=-a\sin\alpha$

解説

O を極とし，図形上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とする。

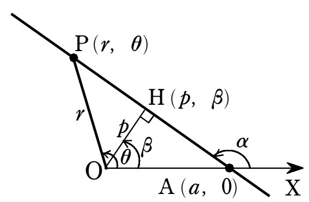


(1) A$(2a,\ \alpha)$ とすると，直角三角形 OAP において

$OP=OA\cos(\theta-\alpha)$

よって

$r=2a\cos(\theta-\alpha)$



(2) 極 O から直線に垂線 OH を下ろし，H$(p,\ \beta)$，

$p>0$ とすると　$r\cos(\theta-\beta)=p$　…… ①

ここで，直角三角形 OHA において

$\beta=\alpha-\frac{\pi}{2}$　…… ②

また　$p=a\cos\beta$　…… ③

① に ②，③ を代入して　$r\sin(\theta-\alpha)=-a\sin\alpha$

$\boxed{4}$ (1)　楕円 $2x^2+3y^2=1$ を極方程式で表せ。

(2)　次の極方程式はどのような曲線を表すか。直交座標の方程式で答えよ。

（ア）　$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{3}\sin\theta$　　　（イ）　$r=\cos\theta+\sin\theta$

（ウ）　$r^2(1+3\cos^2\theta)=4$　　　（エ）　$r^2\cos 2\theta=r\sin\theta(1-r\sin\theta)+1$

解答　(1)　$r^2(2+\sin^2\theta)=1$

(2)　（ア）　直線 $3x+2y=6$　　（イ）　円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

（ウ）　楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$　　（エ）　放物線 $y=x^2-1$

解説

(1)　$2x^2+3y^2=1$ に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$$2r^2\cos^2\theta+3r^2\sin^2\theta=1$$

よって　$2r^2(1-\sin^2\theta)+3r^2\sin^2\theta=1$

ゆえに　$r^2(2+\sin^2\theta)=1$

(2)　（ア）　両辺に $6r$ を掛けて　$6=3r\cos\theta+2r\sin\theta$

ゆえに　$6=3x+2y$　　よって，直線 $3x+2y=6$ を表す。

（イ）　両辺に r を掛けて　$r^2=r\cos\theta+r\sin\theta$

ゆえに　$x^2+y^2=x+y$

よって，円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ を表す。

（ウ）　与式から　$r^2+3(r\cos\theta)^2=4$

ゆえに　$x^2+y^2+3x^2=4$

よって，楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ を表す。

（エ）　与式から　$r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=r\sin\theta(1-r\sin\theta)+1$

よって　$(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2=r\sin\theta(1-r\sin\theta)+1$

ゆえに　$x^2-y^2=y(1-y)+1$

よって，放物線 $y=x^2-1$ を表す。

$\boxed{5}$ (1)　極座標において，点 A $(3,\ \pi)$ を通り始線に垂直な直線を g とする。極 O と直線 g からの距離の比が次のように一定である点 P の軌跡の極方程式を求めよ。

（ア）　1 : 2　　　（イ）　1 : 1

(2)　次の極方程式の表す曲線を，直交座標の方程式で表せ。

（ア）　$r=\dfrac{4}{1-\cos\theta}$　　（イ）　$r=\dfrac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}\cos\theta}$　　（ウ）　$r=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$

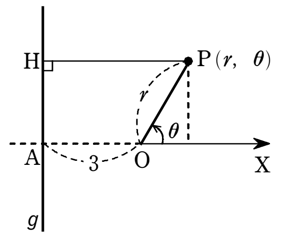
解答　(1)　（ア）　$r=\dfrac{3}{2-\cos\theta}$　　（イ）　$r=\dfrac{3}{1-\cos\theta}$

(2)　（ア）　放物線 $y^2=8(x+2)$　　（イ）　双曲線 $\dfrac{(x-3)^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$

（ウ）　楕円 $\dfrac{(x+\sqrt{3})^2}{4}+y^2=1$

解説

(1)　点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とし，P から直線 g に下ろした垂線を PH とすると



（ア）　PO : PH＝1 : 2　　（イ）　PO : PH＝1 : 1

（ア），（イ）を満たす点 P は直線 g の右側にあり

$$\text{PO}=r,\ \text{PH}=3+r\cos\theta$$

（ア）　$\dfrac{\text{PO}}{\text{PH}}=\dfrac{1}{2}$ であるから　$\dfrac{r}{3+r\cos\theta}=\dfrac{1}{2}$

よって　$2r=3+r\cos\theta$

ゆえに　$r=\dfrac{3}{2-\cos\theta}$

（イ）　$\dfrac{\text{PO}}{\text{PH}}=1$ であるから　$\dfrac{r}{3+r\cos\theta}=1$

よって　$r=3+r\cos\theta$

ゆえに　$r=\dfrac{3}{1-\cos\theta}$

(2)　（ア）　与式から　$r-r\cos\theta=4$　　ゆえに　$r-x=4$

よって　$r=x+4$　　両辺を平方して　$r^2=(x+4)^2$

ゆえに　$x^2+y^2=(x+4)^2$

したがって，放物線 $y^2=8(x+2)$ を表す。

（イ）　与式から　$2r+\sqrt{6}\,r\cos\theta=\sqrt{6}$　　ゆえに　$2r+\sqrt{6}\,x=\sqrt{6}$

よって　$2r=\sqrt{6}(1-x)$　　両辺を平方して　$4r^2=6(1-x)^2$

ゆえに　$2(x^2+y^2)=3(1-x)^2$　　よって　$x^2-6x-2y^2=-3$

したがって，双曲線 $\dfrac{(x-3)^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$ を表す。

（ウ）　与式から　$2r+\sqrt{3}\,r\cos\theta=1$　　ゆえに　$2r+\sqrt{3}\,x=1$

よって　$2r=1-\sqrt{3}\,x$　　両辺を平方して　$4r^2=(1-\sqrt{3}\,x)^2$

ゆえに　$4(x^2+y^2)=(1-\sqrt{3}\,x)^2$　　よって　$x^2+2\sqrt{3}\,x+4y^2=1$

したがって，楕円 $\dfrac{(x+\sqrt{3})^2}{4}+y^2=1$ を表す。

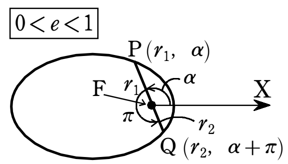
$\boxed{6}$ 2 次曲線の 1 つの焦点 F を通る弦の両端を P，Q とするとき，$\dfrac{1}{\text{FP}}+\dfrac{1}{\text{FQ}}$ は，弦の方向に関係なく一定であることを証明せよ。

解答　略

解説

焦点 F を極とし，極に近い頂点を通る半直線 FX を始線とする極座標を考えると，2 次曲線の極方程式は

$r(1+e\cos\theta)=l\ (e>0,\ l>0)$　　とおける。



P，Q は極を通る直線上にあるから，P $(r_1,\ \alpha)$ とすると，Q $(r_2,\ \alpha+\pi)$ と表され $(r_1>0,\ r_2>0)$

$$\text{FP}=r_1,\ \text{FQ}=r_2$$

また　$\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$

よって　$r_1(1+e\cos\alpha)=l$，　$r_2(1-e\cos\alpha)=l$

ゆえに　$\dfrac{1}{\text{FP}}+\dfrac{1}{\text{FQ}}=\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}=\dfrac{1+e\cos\alpha}{l}+\dfrac{1-e\cos\alpha}{l}=\dfrac{2}{l}$ (一定)