数学演習（媒介変数表示）Ｒ２．２．２５　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の式で表される点 P$(x,\ y)$ は，どのような曲線を描くか。

(1) $\begin{cases} x=t+1 \\ y=\sqrt{t} \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin^2\theta+1 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x=3\cos\theta+2 \\ y=4\sin\theta+1 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x=2^t+2^{-t} \\ y=2^t-2^{-t} \end{cases}$

$\boxed{2}$ 次の式で表される点 P$(x,\ y)$ はどのような曲線を描くか。

(1) $\begin{cases} x=2\sqrt{t}+1 \\ y=4t+2\sqrt{t}+3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=\sin\theta\cos\theta \\ y=1-\sin 2\theta \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=6t \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x=5\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$

(5) $x=\dfrac{2}{\cos\theta}$，$y=\tan\theta$　(6) $\begin{cases} x=3^{t+1}+3^{-t+1}+1 \\ y=3^t-3^{-t} \end{cases}$

$\boxed{3}$ (1)　放物線 $y=x^2-2(t+1)x+2t^2-t$ の頂点は，t の値が変化するとき，どんな曲線上を動くか。

(2)　定円 $x^2+y^2=r^2$ の周上を点 P$(x,\ y)$ が動くとき，座標が $(y^2-x^2,\ 2xy)$ で表される点 Q はどんな曲線上を動くか。

$\boxed{4}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<a)$ の第 1 象限の部分上にある点 P における楕円の法線が，x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ Q，R とする。このとき，△OQR (O は原点) の面積 S のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$ 実数 x，y が $2x^2+3y^2=1$ を満たすとき，x^2-y^2+xy の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{6}$ t を媒介変数とする。次の式で表された曲線はどのような図形を表すか。

(1)　$x=\dfrac{2(1+t^2)}{1-t^2}$，$y=\dfrac{6t}{1-t^2}$

(2)　$x\sin t=\sin^2 t+1$，$y\sin^2 t=\sin^4 t+1$

$\boxed{7}$ 円 $x^2+y^2=1$ の $y>0$ の部分を C とする。C 上の点 P と点 R $(-1,\ 0)$ を結ぶ直線 PR と y 軸の交点を Q とし，その座標を $(0,\ t)$ とする。

(1) 点 P の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とする。$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を t を用いて表せ。

(2) 3 点 A，B，S の座標を A $(-3,\ 0)$，B $(3,\ 0)$，S $\left(0,\ \dfrac{1}{t}\right)$ とし，2 直線 AQ と BS の交点を T とする。点 P が C 上を動くとき，点 T の描く図形を求めよ。

数学演習（媒介変数表示）Ｒ２．２．２５　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1 次の式で表される点 P(x, y) は，どのような曲線を描くか。

(1) $\begin{cases} x=t+1 \\ y=\sqrt{t} \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin^2\theta+1 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x=3\cos\theta+2 \\ y=4\sin\theta+1 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x=2^t+2^{-t} \\ y=2^t-2^{-t} \end{cases}$

解答　(1) 放物線 $x=y^2+1$ の $y\geqq 0$ の部分

(2) 放物線 $y=2-x^2$ の $-1\leqq x\leqq 1$ の部分　(3) 楕円 $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$

(4) 双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ の $x\geqq 2$ の部分

解説

(1) $y=\sqrt{t}$ から　$t=y^2$　$x=t+1$ に代入して　$x=y^2+1$

また，$y=\sqrt{t}$ で $\sqrt{t}\geqq 0$ であるから　$y\geqq 0$

よって　放物線 $x=y^2+1$ の $y\geqq 0$ の部分

(2) $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ から　$y=(1-\cos^2\theta)+1=2-\cos^2\theta$

$\cos\theta=x$ を代入して　$y=2-x^2$

また，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ であるから　$-1\leqq x\leqq 1$

よって　放物線 $y=2-x^2$ の $-1\leqq x\leqq 1$ の部分

(3) $x=3\cos\theta+2$，$y=4\sin\theta+1$ から　$\cos\theta=\dfrac{x-2}{3}$，$\sin\theta=\dfrac{y-1}{4}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して　楕円 $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$

(4) $x=2^t+2^{-t}$ から　$x^2=2^{2t}+2+2^{-2t}$　…… ①

$y=2^t-2^{-t}$ から　$y^2=2^{2t}-2+2^{-2t}$　…… ②

①－② から　$x^2-y^2=4$

また，$2^t>0$，$2^{-t}>0$ から　$2^t+2^{-t}\geqq 2\sqrt{2^t\cdot 2^{-t}}=2$

等号は，$2^t=2^{-t}$ すなわち $t=-t$ から $t=0$ のとき成り立つ。

よって　双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ の $x\geqq 2$ の部分

2 次の式で表される点 P(x, y) はどのような曲線を描くか。

(1) $\begin{cases} x=2\sqrt{t}+1 \\ y=4t+2\sqrt{t}+3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=\sin\theta\cos\theta \\ y=1-\sin 2\theta \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=6t \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x=5\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$

(5) $x=\dfrac{2}{\cos\theta}$，$y=\tan\theta$　(6) $\begin{cases} x=3^{t+1}+3^{-t+1}+1 \\ y=3^t-3^{-t} \end{cases}$

解答　(1) 放物線 $y=x^2-x+3$ の $x\geqq 1$ の部分

(2) 直線 $y=1-2x$ の $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ の部分　(3) 放物線 $y^2=12x$

(4) 楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$　(5) 双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

(6) 双曲線 $\dfrac{(x-1)^2}{36}-\dfrac{y^2}{4}=1$ の $x\geqq 7$ の部分

解説

(1) $x=2\sqrt{t}+1$ …… ①，$y=4t+2\sqrt{t}+3$ …… ② とする。

① から　$2\sqrt{t}=x-1$　…… ③

これを ② に代入して　$y=(x-1)^2+(x-1)+3$

よって　$y=x^2-x+3$

また，③ で $\sqrt{t}\geqq 0$ であるから　$x-1\geqq 0$　ゆえに　$x\geqq 1$

したがって　放物線 $y=x^2-x+3$ の $x\geqq 1$ の部分

(2) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ であるから　$y=1-2\sin\theta\cos\theta$

$\sin\theta\cos\theta=x$ を代入して　$y=1-2x$

また，$-1\leqq\sin 2\theta\leqq 1$ であるから　$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\theta\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$

よって　$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$

したがって　直線 $y=1-2x$ の $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ の部分

(3) $y=6t$ から　$y^2=36t^2$　$x=3t^2$ から　$12x=36t^2$

よって　放物線 $y^2=12x$

(4) $x=5\cos\theta$，$y=2\sin\theta$ から　$\cos\theta=\dfrac{x}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{2}$

これを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して　楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$

(5) $x=\dfrac{2}{\cos\theta}$，$y=\tan\theta$ から　$\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{x}{2}$，$\tan\theta=y$

これを $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入して　$1+y^2=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

よって　双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

(6) $x=3(3^t+3^{-t})+1$ であるから　$\dfrac{x-1}{3}=3^t+3^{-t}$

よって　$\left(\dfrac{x-1}{3}\right)^2=3^{2t}+2+3^{-2t}$　…… ①

また，$y=3^t-3^{-t}$ から　$y^2=3^{2t}-2+3^{-2t}$　…… ②

①－② から　$\left(\dfrac{x-1}{3}\right)^2-y^2=4$

また，$3^t>0$，$3^{-t}>0$ であるから

$$x=3(3^t+3^{-t})+1\geqq 3\cdot 2\sqrt{3^t\cdot 3^{-t}}+1=6\cdot 1+1=7$$

等号は，$3^t=3^{-t}$ すなわち $t=-t$ から $t=0$ のとき成り立つ。

したがって　双曲線 $\dfrac{(x-1)^2}{36}-\dfrac{y^2}{4}=1$ の $x\geqq 7$ の部分

3 (1) 放物線 $y=x^2-2(t+1)x+2t^2-t$ の頂点は，t の値が変化するとき，どんな曲線上を動くか。

(2) 定円 $x^2+y^2=r^2$ の周上を点 P(x, y) が動くとき，座標が $(y^2-x^2, 2xy)$ で表される点 Q はどんな曲線上を動くか。

解答　(1) 放物線 $y=x^2-5x+3$　(2) 円 $x^2+y^2=(r^2)^2$

解説

(1) $y=x^2-2(t+1)x+2t^2-t=\{x^2-2(t+1)x+(t+1)^2\}-(t+1)^2+2t^2-t$

$=\{x-(t+1)\}^2+t^2-3t-1$

よって，放物線の頂点の座標を (x, y) とすると

$x=t+1$ …… ①，$y=t^2-3t-1$ …… ②

① から　$t=x-1$

これを ② に代入して　$y=(x-1)^2-3(x-1)-1$

よって　$y=x^2-5x+3$

したがって，頂点は放物線 $y=x^2-5x+3$ 上を動く。

(2) $x^2+y^2=r^2$ から，P(x, y) とすると　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$　と表される。

Q(X, Y) とすると

$$X=y^2-x^2=r^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=-r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=-r^2\cos 2\theta$$

$$Y=2xy=2r\cos\theta\cdot r\sin\theta=r^2\sin 2\theta$$

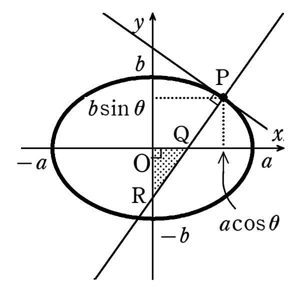
よって　$X^2+Y^2=r^4(\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta)=r^4$

したがって，点 Q は 円 $x^2+y^2=(r^2)^2$ 上を動く。

4 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<a)$ の第 1 象限の部分上にある点 P における楕円の法線が，x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ Q，R とする。このとき，△OQR (O は原点) の面積 S のとりうる値の範囲を求めよ。

解答　$0<S\leqq\dfrac{(a^2-b^2)^2}{4ab}$

解説



条件から，P$(a\cos\theta, b\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表される。

点 P における接線の方程式は　$\dfrac{a\cos\theta}{a^2}x+\dfrac{b\sin\theta}{b^2}y=1$

すなわち　$(b\cos\theta)x+(a\sin\theta)y=ab$　…… ①

① に垂直な直線は，

$(a\sin\theta)x-(b\cos\theta)y=c$　(c は定数)

と表される。

これが点 P を通るとき

$c=a\sin\theta\cdot a\cos\theta-b\cos\theta\cdot b\sin\theta$

$=(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta$

よって，点 P における法線の方程式は

$(a\sin\theta)x-(b\cos\theta)y=(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta$　…… ②

② において，$y=0$，$x=0$ とそれぞれおくことにより

$x=\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos\theta$，$y=-\dfrac{a^2-b^2}{b}\sin\theta$

ゆえに　Q$\left(\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos\theta, 0\right)$，R$\left(0, -\dfrac{a^2-b^2}{b}\sin\theta\right)$

ここで，$0<b<a$，$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ より，$\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos\theta>0$，$-\dfrac{a^2-b^2}{b}\sin\theta<0$

であるから　$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos\theta\cdot\dfrac{a^2-b^2}{b}\sin\theta$

$=\dfrac{(a^2-b^2)^2}{2ab}\sin\theta\cos\theta=\dfrac{(a^2-b^2)^2}{4ab}\sin 2\theta$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<2\theta<\pi$ であるから　$0<\sin 2\theta\leqq 1$

したがって　$0<S\leqq\dfrac{(a^2-b^2)^2}{4ab}$

5 実数 x，y が $2x^2+3y^2=1$ を満たすとき，x^2-y^2+xy の最大値と最小値を求めよ。

解答　最大値は $\dfrac{1+\sqrt{31}}{12}$，最小値は $\dfrac{1-\sqrt{31}}{12}$

解説

条件から　$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$　と表される。

$$x^2-y^2+xy=\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{3}\sin^2\theta+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta\cos\theta$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}$$
$$=\frac{1}{12}(\sqrt{6}\sin 2\theta+5\cos 2\theta)+\frac{1}{12}=\frac{\sqrt{31}}{12}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{1}{12}$$

ただし　$\sin\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{31}}$，$\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{6}{31}}$

ここで，$-1\leqq\sin(2\theta+\alpha)\leqq 1$ であるから，x^2-y^2+xy の

最大値は　$\dfrac{1+\sqrt{31}}{12}$，最小値は　$\dfrac{1-\sqrt{31}}{12}$

6　t を媒介変数とする。次の式で表された曲線はどのような図形を表すか。

(1)　$x=\dfrac{2(1+t^2)}{1-t^2}$，$y=\dfrac{6t}{1-t^2}$　　(2)　$x\sin t=\sin^2 t+1$，$y\sin^2 t=\sin^4 t+1$

解答　(1)　双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ の点 $(-2,\ 0)$ を除いた部分

(2)　放物線 $y=x^2-2$ の $x\leqq-2$，$2\leqq x$ の部分

解説

(1)　$x=\dfrac{2(1+t^2)}{1-t^2}$ …… ①，$y=\dfrac{6t}{1-t^2}$ …… ② とする。

① から　$x(1-t^2)=2(1+t^2)$　　よって　$(x+2)t^2=x-2$

$x=-2$ とすると，$0\cdot t^2=-4$ となり不合理。

ゆえに　$x\neq-2$　　よって　$t^2=\dfrac{x-2}{x+2}$　…… ③

③ を ② に代入して　$y=6t\cdot\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{3(x+2)}{2}t$

$x\neq-2$ であるから　$t=\dfrac{2y}{3(x+2)}$　　③ から　$\dfrac{4y^2}{9(x+2)^2}=\dfrac{x-2}{x+2}$

よって　$4y^2=9(x+2)(x-2)$　　整理すると　$9x^2-4y^2=36$　…… ④

④ に $x=-2$ を代入すると　$-4y^2=0$　　ゆえに　$y=0$

したがって，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ の点 $(-2,\ 0)$ を除いた部分を表す。

(2)　$x\sin t=\sin^2 t+1$ で $\sin t=0$ とすると，$x\cdot 0=1$ となり不合理。

よって，$\sin t\neq 0$ であり　$x=\sin t+\dfrac{1}{\sin t}$，$y=\sin^2 t+\dfrac{1}{\sin^2 t}$

$\sin^2 t+\dfrac{1}{\sin^2 t}=\left(\sin t+\dfrac{1}{\sin t}\right)^2-2$ であるから　$y=x^2-2$

ここで，$\sin t=u$ とおくと　$x=u+\dfrac{1}{u}$　$(-1\leqq u\leqq 1,\ u\neq 0)$

(相加平均) ≧ (相乗平均) により

$u>0$ のとき　$u+\dfrac{1}{u}\geqq 2\sqrt{u\cdot\dfrac{1}{u}}=2$

$\left(\text{等号は } u=\dfrac{1}{u} \text{ かつ } u>0\text{，すなわち } u=1 \text{ のとき成り立つ。}\right)$

$u<0$ のとき　$(-u)+\left(-\dfrac{1}{u}\right)\geqq 2\sqrt{(-u)\cdot\left(-\dfrac{1}{u}\right)}=2$　すなわち　$u+\dfrac{1}{u}\leqq-2$

$\left(\text{等号は } -u=-\dfrac{1}{u} \text{ かつ } u<0\text{，すなわち } u=-1 \text{ のとき成り立つ。}\right)$

よって　$x\leqq-2$，$2\leqq x$

ゆえに，放物線 $y=x^2-2$ の $x\leqq-2$，$2\leqq x$ の部分を表す。

7　円 $x^2+y^2=1$ の $y>0$ の部分を C とする。C 上の点 P と点 R $(-1,\ 0)$ を結ぶ直線 PR と y 軸の交点を Q とし，その座標を $(0,\ t)$ とする。

(1)　点 P の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とする。$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を t を用いて表せ。

(2)　3 点 A，B，S の座標を A $(-3,\ 0)$，B $(3,\ 0)$，S $\left(0,\ \dfrac{1}{t}\right)$ とし，2 直線 AQ と BS の交点を T とする。点 P が C 上を動くとき，点 T の描く図形を求めよ。

解答　(1)　$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$　　(2)　楕円 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ $(y>0)$

解説

(1)　点 P は $y>0$ の範囲にあるから　$t>0$

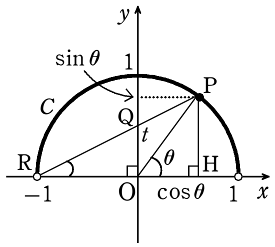
また，$0<\theta<\pi$ として考える。

点 P から x 軸に垂線 PH を下ろすと，

△QRO∽△PRH であるから

$$\frac{\text{OQ}}{\text{RO}}=\frac{\text{HP}}{\text{RH}}$$

ゆえに　$\dfrac{t}{1}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$　…… ①



両辺を平方すると　$t^2=\dfrac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ から　$t^2=\dfrac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^2}$　　よって　$t^2=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

これを $\cos\theta$ について解くと　$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

① から　$\sin\theta=t(1+\cos\theta)=t\left(1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)=\dfrac{2t}{1+t^2}$

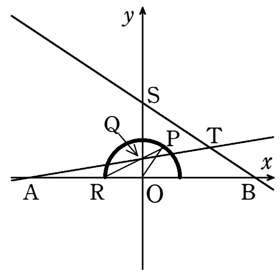
(2)　直線 AQ，BS の方程式はそれぞれ

$tx-3y=-3t$　…… ②，

$x+3ty=3$　…… ③

③×t−② から　$(3t^2+3)y=6t$

よって　$y=\dfrac{2t}{1+t^2}$　…… ④



これを ③ に代入して　$x+\dfrac{6t^2}{1+t^2}=3$

ゆえに　$x=\dfrac{3(1-t^2)}{1+t^2}$　…… ⑤

(1) および ④，⑤ から　$x=\dfrac{3(1-t^2)}{1+t^2}=3\cos\theta$，$y=\dfrac{2t}{1+t^2}=\sin\theta$

よって　$\cos\theta=\dfrac{x}{3}$，$\sin\theta=y$　　ゆえに　$\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+y^2=1$

$0<\theta<\pi$ であるから　$y=\sin\theta>0$

したがって，点 T の描く図形は　楕円 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ $(y>0)$