数学演習（２次曲線の性質･領域）Ｒ２．２．２４　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1 次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(1) 点 F$(1,\ 0)$ と直線 $x=3$ からの距離の比が $1:\sqrt{3}$ であるような点 P

(2) 点 F$(3,\ 1)$ と直線 $x=\dfrac{4}{3}$ からの距離の比が $3:2$ であるような点 P

2 双曲線上の任意の点 P から 2 つの漸近線に垂線 PQ，PR を下ろすと，線分の長さの積 PQ･PR は一定であることを証明せよ。

3 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}<1$

(2) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}\geqq 1$

$\boxed{4}$ 実数 x，y が 2 つの不等式 $y \leqq x+1$，$x^2+4y^2 \leqq 4$ を満たすとき，$y-2x$ の最大値，最小値を求めよ。

$\boxed{5}$ 連立不等式 $x-2y+3 \geqq 0$，$2x-y \leqq 0$，$x+y \geqq 0$ の表す領域を A とする。点 $(x,\ y)$ が領域 A を動くとき，y^2-4x の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{6}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 上に 2 点 A，B がある。原点 O と直線 AB の距離を h とする。$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{\mathrm{OA}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OB}^2}$ であることを示せ。

(2) h は点 A のとり方に関係なく一定であることを示せ。

数学演習（２次曲線の性質･領域）Ｒ２．２．２４　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の条件を満たす点Pの軌跡を求めよ。

(1)　点F$(1,\ 0)$と直線 $x=3$ からの距離の比が $1:\sqrt{3}$ であるような点P

(2)　点F$(3,\ 1)$と直線 $x=\dfrac{4}{3}$ からの距離の比が $3:2$ であるような点P

解答　(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　(2)　双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{5}=1$

解説

P$(x,\ y)$とする。

(1)　点Pから直線 $x=3$ に垂線PHを下ろすと

$\mathrm{PF}:\mathrm{PH}=1:\sqrt{3}$

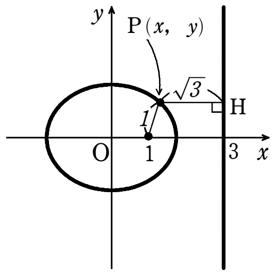
よって　$\sqrt{3}\,\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$

ゆえに　$3\mathrm{PF}^2=\mathrm{PH}^2$

よって　$3\{(x-1)^2+y^2\}=(x-3)^2$

整理して　$2x^2+3y^2=6$

したがって，求める軌跡は　楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$



(2)　点Pから直線 $x=\dfrac{4}{3}$ に垂線PHを下ろすと

$\mathrm{PF}:\mathrm{PH}=3:2$

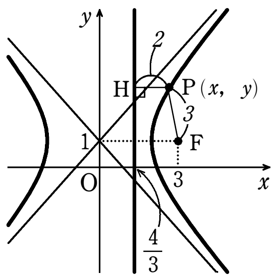
よって　$2\mathrm{PF}=3\mathrm{PH}$

ゆえに　$4\mathrm{PF}^2=9\mathrm{PH}^2$

よって　$4\{(x-3)^2+(y-1)^2\}=9\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2$

整理して　$5x^2-4(y-1)^2=20$

したがって，求める軌跡は　双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{5}=1$



$\boxed{2}$ 双曲線上の任意の点Pから2つの漸近線に垂線PQ，PRを下ろすと，線分の長さの積PQ･PRは一定であることを証明せよ。

解答　略

解説

双曲線の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$

とすると，漸近線の方程式は

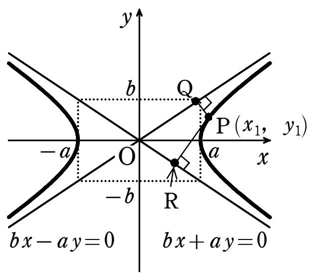
$\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0,\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0$

すなわち　$bx-ay=0,\ bx+ay=0$

P$(x_1,\ y_1)$とすると

$$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=\frac{|bx_1-ay_1|}{\sqrt{b^2+a^2}}\cdot\frac{|bx_1+ay_1|}{\sqrt{b^2+a^2}}$$

$$=\frac{|b^2x_1{}^2-a^2y_1{}^2|}{a^2+b^2}\quad\cdots\cdots①$$



点P$(x_1,\ y_1)$は双曲線上にあるから　$\dfrac{x_1{}^2}{a^2}-\dfrac{y_1{}^2}{b^2}=1$

よって　$b^2x_1{}^2-a^2y_1{}^2=a^2b^2$

これを①に代入して　$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ (一定)

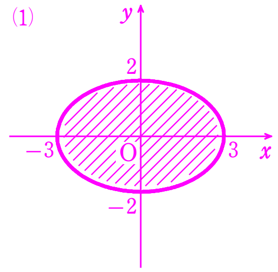
$\boxed{3}$ 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}<1$　　　(2)　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}\geqq 1$

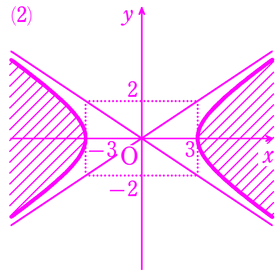
解答　(1)　図(1)の斜線部分。ただし，境界線を含まない

(2)　図(2)の斜線部分。ただし，境界線を含む

(1)



(2)

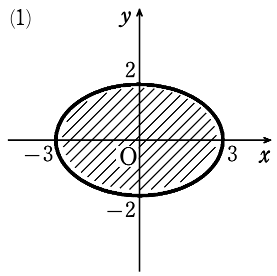


解説

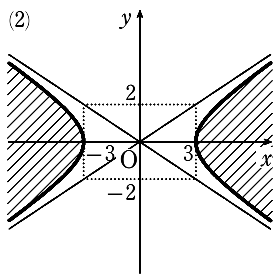
(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の内部を表す。 図(1)の斜線部分。ただし，境界線を含まない。

(2)　双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ と，この双曲線で分けられた部分のうち，原点を含まない部分を表す。 図(2)の斜線部分。ただし，境界線を含む。

(1)



(2)



$\boxed{4}$ 実数 $x,\ y$ が2つの不等式 $y\leqq x+1,\ x^2+4y^2\leqq 4$ を満たすとき，$y-2x$ の最大値，最小値を求めよ。

解答　$x=-\dfrac{8}{5},\ y=-\dfrac{3}{5}$ のとき最大値 $\dfrac{13}{5}$；

$x=\dfrac{8\sqrt{17}}{17},\ y=-\dfrac{\sqrt{17}}{17}$ のとき最小値 $-\sqrt{17}$

解説

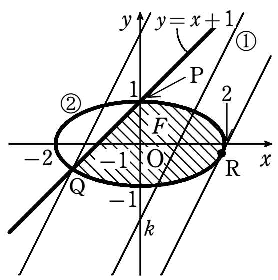
$y\leqq x+1,\ x^2+4y^2\leqq 4$ を満たす領域 F は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

図の点P，Qの座標は，連立方程式 $y=x+1$，$x^2+4y^2=4$ を解くことにより

P$(0,\ 1)$，Q$\left(-\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{3}{5}\right)$

$y-2x=k$ とおくと　$y=2x+k$ ……①

直線①が楕円 $x^2+4y^2=4$ ……② に接するとき，その接点のうち領域 F に含まれるものをRとする。



①，②から y を消去して整理すると　$17x^2+16kx+4(k^2-1)=0$ ……③

③の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(8k)^2-17\cdot4(k^2-1)=-4(k^2-17)$

$D=0$ とすると，$k^2-17=0$ から　$k=\pm\sqrt{17}$

図から，$k=-\sqrt{17}$ のとき，直線①は点Rで楕円②に接する。

このとき，R$(x_1,\ y_1)$とすると　$x_1=-\dfrac{8}{17}\cdot(-\sqrt{17})=\dfrac{8\sqrt{17}}{17}$

よって　$y_1=2\cdot\dfrac{8\sqrt{17}}{17}-\sqrt{17}=-\dfrac{\sqrt{17}}{17}$

2直線①，$y=x+1$ の傾きについて，$2>1$ であるから，図より k は直線①が，点Qを通るとき最大となり，点Rを通るとき最小となる。

よって　$x=-\dfrac{8}{5},\ y=-\dfrac{3}{5}$ のとき最大値 $\dfrac{13}{5}$；

$x=\dfrac{8\sqrt{17}}{17},\ y=-\dfrac{\sqrt{17}}{17}$ のとき最小値 $-\sqrt{17}$

$\boxed{5}$ 連立不等式 $x-2y+3\geqq 0,\ 2x-y\leqq 0,\ x+y\geqq 0$ の表す領域を A とする。点$(x,\ y)$が領域 A を動くとき，y^2-4x の最大値と最小値を求めよ。

解答　$x=-1,\ y=1$ のとき最大値5；$x=\dfrac{1}{2},\ y=1$ のとき最小値 -1

解説

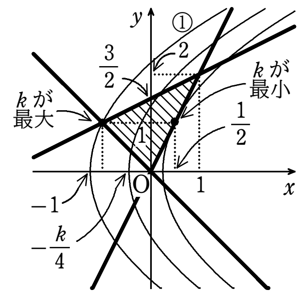
領域 A は，3点$(0,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(-1,\ 1)$を頂点とする三角形の周および内部を表す。

$y^2-4x=k$ とおくと　$x=\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{k}{4}$ ……①

k が最大となるのは $-\dfrac{k}{4}$ が最小となるときである。

それは図から，放物線①が点$(-1,\ 1)$を通るときである。このとき　$k=1^2-4(-1)=5$

また，k が最小となるのは $-\dfrac{k}{4}$ が最大となるときである。



それは図から，放物線①が直線 $y=2x$ と $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で接するときである。

$y=2x$ を①に代入して整理すると　$4x^2-4x-k=0$ ……②

この2次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-4\cdot(-k)=4+4k$

$D=0$ とすると，$4+4k=0$ から　$k=-1$

このとき，②の重解は　$x=-\dfrac{-2}{4}=\dfrac{1}{2}$ ($0\leqq x\leqq 1$ を満たす。)

これを $y=2x$ に代入して　$y=1$

したがって　$x=-1,\ y=1$ のとき最大値5；$x=\dfrac{1}{2},\ y=1$ のとき最小値 -1

$\boxed{6}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 上に2点A，Bがある。原点Oと直線ABの距離を h とする。$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ のとき，次の問いに答えよ。

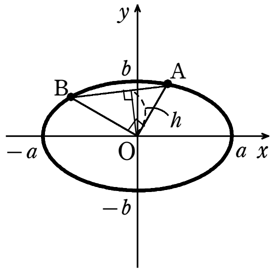
(1)　$\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{\mathrm{OA}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OB}^2}$ であることを示せ。

(2)　h は点 A のとり方に関係なく一定であることを示せ。

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　△OAB の面積を S とする。



∠AOB＝90° であるから　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$　……①

また，△OAB は直角三角形であるから

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot h=\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2}\cdot h \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　　$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\sqrt{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2}\cdot h$

両辺を平方して　　$\mathrm{OA}^2\cdot\mathrm{OB}^2=h^2(\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2)$

両辺を $h^2\cdot\mathrm{OA}^2\cdot\mathrm{OB}^2$ で割ると　$\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{\mathrm{OA}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OB}^2}$

別解　A $(x_1,\ y_1)$，B $(x_2,\ y_2)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から　　$x_1x_2+y_1y_2=0$　……③

直線 AB の方程式は　　$(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$

すなわち　$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-x_1y_2+x_2y_1=0$

よって　　$h=\dfrac{|-x_1y_2+x_2y_1|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$

ゆえに　　$\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}{(-x_1y_2+x_2y_1)^2}=\dfrac{x_1{}^2+x_2{}^2+y_1{}^2+y_2{}^2-2(x_1x_2+y_1y_2)}{x_1{}^2y_2{}^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2{}^2y_1{}^2}$

③ から　　$\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{x_1{}^2+x_2{}^2+y_1{}^2+y_2{}^2}{x_1{}^2y_2{}^2+2x_1{}^2x_2{}^2+x_2{}^2y_1{}^2}$

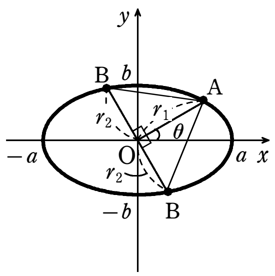
また　　$\dfrac{1}{\mathrm{OA}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OB}^2}=\dfrac{1}{x_1{}^2+y_1{}^2}+\dfrac{1}{x_2{}^2+y_2{}^2}=\dfrac{x_2{}^2+y_2{}^2+x_1{}^2+y_1{}^2}{(x_1{}^2+y_1{}^2)(x_2{}^2+y_2{}^2)}$

$$=\frac{x_1{}^2+x_2{}^2+y_1{}^2+y_2{}^2}{x_1{}^2x_2{}^2+x_1{}^2y_2{}^2+x_2{}^2y_1{}^2+y_1{}^2y_2{}^2}$$

③ から　　$\dfrac{1}{\mathrm{OA}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OB}^2}=\dfrac{x_1{}^2+x_2{}^2+y_1{}^2+y_2{}^2}{x_1{}^2y_2{}^2+2x_1{}^2x_2{}^2+x_2{}^2y_1{}^2}$

したがって　　$\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{\mathrm{OA}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OB}^2}$

(2)　$\mathrm{OA}=r_1$，$\mathrm{OB}=r_2$ とし，動径 OA の表す角を θ とすると　　A $(r_1\cos\theta,\ r_1\sin\theta)$



点 A は楕円上にあるから

$$\frac{(r_1\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(r_1\sin\theta)^2}{b^2}=1$$

ゆえに　　$r_1{}^2(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)=a^2b^2$

$a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta\neq 0$ から

$$\mathrm{OA}^2=r_1{}^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

また，このとき B $(r_2\cos(\theta\pm 90°),\ r_2\sin(\theta\pm 90°))$ (複号同順) と表されるから，同様にして　　$\mathrm{OB}^2=r_2{}^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2\sin^2(\theta\pm 90°)+b^2\cos^2(\theta\pm 90°)}=\dfrac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$

ゆえに，(1) の結果により

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{r_1{}^2}+\frac{1}{r_2{}^2}=\frac{a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

$a>0$，$b>0$，$h>0$ であるから　　$h=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

よって，h は点 A のとり方に関係なく一定である。