数学演習（２次曲線の接線）Ｒ２．２．２３

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の 2 次曲線上の，与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1)　$y^2=4x$，点 $(1,\ 2)$

(2)　$\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{8}=1$，点 $(3,\ 2)$

(3)　$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$，点 $(-2\sqrt{5},\ 1)$

$\boxed{2}$ (1)　点 $(-1,\ 3)$ から楕円 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に引いた接線の方程式を，2 次方程式の判別式を利用して求めよ。

(2)　次の 2 次曲線の，与えられた点から引いた接線の方程式を求めよ。

(ア)　$x^2-4y^2=4$，点 $(2,\ 3)$

(イ)　$y^2=8x$，点 $(3,\ 5)$

$\boxed{3}$ 放物線 $y^2=4px$ $(p>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線と x 軸との交点を T，放物線の焦点を F とすると，$\angle\mathrm{PTF}=\angle\mathrm{TPF}$ であることを証明せよ。ただし，$x_1>0$，$y_1>0$ とする。

$\boxed{4}$ 楕円 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ と 2 定点 A $(0,\ -1)$，P$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ がある。楕円 C 上を動く点 Q に対し，△APQ の面積が最大となるとき，点 Q の座標および △APQ の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ 楕円 $x^2+4y^2=4$ について，楕円の外部の点 P$(a,\ b)$ から，この楕円に引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。

$\boxed{6}$ 放物線 $y=\dfrac{3}{4}x^2$ と楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ の共通接線の方程式を求めよ。

$\boxed{1}$ 次の２次曲線上の，与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1)　$y^2=4x$，点 $(1,\ 2)$　　　(2)　$\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{8}=1$，点 $(3,\ 2)$

(3)　$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$，点 $(-2\sqrt{5},\ 1)$

解答　(1)　$y=x+1$　　(2)　$2x+3y=12$　　(3)　$\sqrt{5}x+2y+8=0$

解説

(1)　$2y=2\cdot1\cdot(x+1)$　　すなわち　$y=x+1$

(2)　$\dfrac{3x}{18}+\dfrac{2y}{8}=1$　　すなわち　$2x+3y=12$

(3)　$\dfrac{-2\sqrt{5}\,x}{16}-\dfrac{1\cdot y}{4}=1$　　すなわち　$\sqrt{5}\,x+2y+8=0$

$\boxed{2}$ (1)　点 $(-1,\ 3)$ から楕円 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に引いた接線の方程式を，２次方程式の判別式を利用して求めよ。

(2)　次の２次曲線の，与えられた点から引いた接線の方程式を求めよ。

（ア）　$x^2-4y^2=4$，点 $(2,\ 3)$　　　（イ）　$y^2=8x$，点 $(3,\ 5)$

解答　(1)　$y=x+4$，$y=-\dfrac{5}{11}x+\dfrac{28}{11}$

(2)（ア）　$x=2$，$5x-6y+8=0$　　（イ）　$y=x+2$，$y=\dfrac{2}{3}x+3$

解説

(1)　直線 $x=-1$ は明らかに接線ではないから，求める接線の方程式を

$y=m(x+1)+3$　…… ①　とおく。

① を楕円の方程式 $x^2+3y^2=12$ …… ② に代入して整理すると

$$(3m^2+1)x^2+6m(m+3)x+3(m^2+6m+5)=0$$

この２次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{3m(m+3)\}^2-(3m^2+1)\cdot3(m^2+6m+5)=3(m-1)(11m+5)$$

直線 ① が楕円 ② に接するから　$D=0$

よって　$3(m-1)(11m+5)=0$　　ゆえに　$m=1,\ -\dfrac{5}{11}$

① に代入して，求める接線の方程式は　$y=x+4$，$y=-\dfrac{5}{11}x+\dfrac{28}{11}$

(2)（ア）　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は　$x_1x-4y_1y=4$　…… ①

これが点 $(2,\ 3)$ を通るから

$2x_1-12y_1=4$

よって　$x_1=6y_1+2$

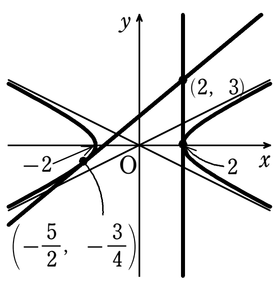
これを $x_1{}^2-4y_1{}^2=4$ に代入して整理すると

$y_1(4y_1+3)=0$

ゆえに　$y_1=0,\ -\dfrac{3}{4}$

$y_1=0$ のとき　$x_1=2$，　$y_1=-\dfrac{3}{4}$ のとき　$x_1=-\dfrac{5}{2}$

よって，① から　$x=2$，$5x-6y+8=0$



別解　双曲線 $x^2-4y^2=4$ の頂点の１つは点 $(2,\ 0)$ であるから，直線 $x=2$ は接線の１つである。

もう１つの接線の方程式を $y=m(x-2)+3$ …… ① とおき，$x^2-4y^2=4$ …… ② に代入して整理すると　$(1-4m^2)x^2+8(2m^2-3m)x-8(2m^2-6m+5)=0$　…… ③

直線 ① が双曲線 ② に接するとき，$1-4m^2\neq0$ で，このとき２次方程式 ③ の判別式を D とすると　$D=0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=16(2m^2-3m)^2+8(1-4m^2)(2m^2-6m+5)=8(5-6m)$

$D=0$ とすると　$m=\dfrac{5}{6}$　　これは $1-4m^2\neq0$ を満たす。

$m=\dfrac{5}{6}$ を ① に代入して　$y=\dfrac{5}{6}(x-2)+3$　すなわち　$5x-6y+8=0$

以上から，求める接線の方程式は　$x=2$，$5x-6y+8=0$

（イ）　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は　$y_1y=4(x+x_1)$　…… ①

これが点 $(3,\ 5)$ を通るから　$5y_1=4(3+x_1)$　　よって　$4x_1=5y_1-12$

これを $y_1{}^2=8x_1$ に代入して整理すると　$(y_1-4)(y_1-6)=0$

ゆえに　$y_1=4,\ 6$

$y_1=4$ のとき　$x_1=2$，　$y_1=6$ のとき　$x_1=\dfrac{9}{2}$

よって，① から　$y=x+2$，$y=\dfrac{2}{3}x+3$

別解　直線 $x=3$ は明らかに放物線 $y^2=8x$ の接線ではない。

求める接線の方程式を $y=m(x-3)+5$ …… ① とおき，$y^2=8x$ …… ② に代入して整理すると　$m^2x^2-2(3m^2-5m+4)x+9m^2-30m+25=0$　…… ③

直線 ① が放物線 ② に接するとき，$m^2\neq0$ で，このとき２次方程式 ③ の判別式を D とすると　$D=0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=\{-(3m^2-5m+4)\}^2-m^2(9m^2-30m+25)=8(3m^2-5m+2)$

$=8(m-1)(3m-2)$

$D=0$ とすると　$m=1,\ \dfrac{2}{3}$　　これは $m^2\neq0$ を満たす。

この m の値を ① にそれぞれ代入して，求める接線の方程式は

$y=(x-3)+5$，$y=\dfrac{2}{3}(x-3)+5$　すなわち　$y=x+2$，$y=\dfrac{2}{3}x+3$

$\boxed{3}$ 放物線 $y^2=4px$ $(p>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線と x 軸との交点を T，放物線の焦点を F とすると，$\angle\mathrm{PTF}=\angle\mathrm{TPF}$ であることを証明せよ。ただし，$x_1>0$，$y_1>0$ とする。

解答　略

解説

$y^2=4px$ $(p>0)$ …… ① とする。

放物線 ① 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$y_1y=2p(x+x_1)$　…… ②

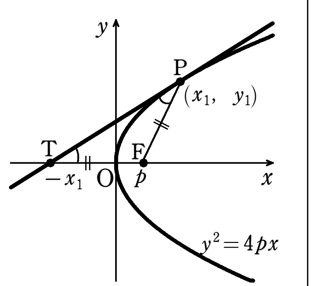
② で $y=0$ とすると　$x=-x_1$

よって　$\mathrm{T}(-x_1,\ 0)$

また，$\mathrm{F}(p,\ 0)$ であるから　$\mathrm{FP}=\sqrt{(x_1-p)^2+y_1{}^2}$

ここで，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ は放物線 ① 上にあるから

$y_1{}^2=4px_1$



$x_1>0$，$p>0$ であるから

$\mathrm{FP}=\sqrt{(x_1-p)^2+4px_1}=\sqrt{(x_1+p)^2}=x_1+p$

また　$\mathrm{FT}=p-(-x_1)=x_1+p$

ゆえに　$\mathrm{FP}=\mathrm{FT}$

したがって，$\triangle\mathrm{FPT}$ は二等辺三角形であるから　$\angle\mathrm{PTF}=\angle\mathrm{TPF}$

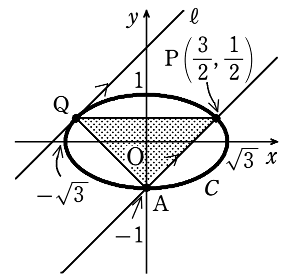
$\boxed{4}$ 楕円 $C:\ \dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ と２定点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ がある。楕円 C 上を動く点 Q に対し，$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積が最大となるとき，点 Q の座標および $\triangle\mathrm{APQ}$ の面積を求めよ。

解答　$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，面積は $\dfrac{9}{4}$

解説

２点 A，P はともに楕円 C 上にあり　$\mathrm{AP}=$(一定)

よって，$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積が最大となるのは，点 Q と直線 AP の距離が最大となるとき，すなわち，点 Q が第２象限にあり，かつ点 Q における接線 ℓ が直線 AP に平行となるときである。



このとき，楕円 C と直線 ℓ の接点の座標を $(p,\ q)$ $(p<0,\ q>0)$ とすると，直線 ℓ の方程式は

$\dfrac{px}{3}+qy=1$　すなわち　$y=-\dfrac{p}{3q}x+\dfrac{1}{q}$

ここで，直線 AP の傾きは　$\dfrac{\frac{1}{2}-(-1)}{\frac{3}{2}-0}=1$

よって，$-\dfrac{p}{3q}=1$ とすると　$p=-3q$

これを $\dfrac{p^2}{3}+q^2=1$ に代入して整理すると　$4q^2=1$

$q>0$ であるから　$q=\dfrac{1}{2}$　　ゆえに　$p=-\dfrac{3}{2}$

よって，求める点 Q の座標は　$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

また，このとき直線 PQ は x 軸に平行であるから，$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\cdot\left\{\frac{1}{2}-(-1)\right\}=\frac{9}{4}$$

別解　$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積が最大となるのは，点 Q と直線 AP の距離 d が最大となるときである。

$\mathrm{Q}(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とすると，直線 AP の方程式は $x-y-1=0$ であるから　$d=\dfrac{|\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left|2\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)-1\right|$

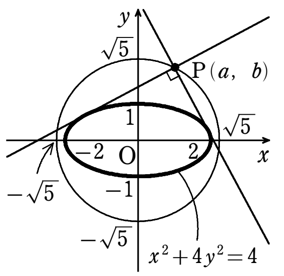
よって，$\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)=-1$ すなわち $\theta+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{3}{2}\pi$ から $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき d は最大値 $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ をとる。

このとき　$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$　　$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AP}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{9}{4}$

$\boxed{5}$ 楕円 $x^2+4y^2=4$ について，楕円の外部の点 P$(a,\ b)$ から，この楕円に引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。

解答　円 $x^2+y^2=5$

解説



[1]　$a \fallingdotseq \pm 2$ のとき，点 P を通る接線の方程式は

$y=m(x-a)+b$　とおける。

これを楕円の方程式に代入して整理すると

$(4m^2+1)x^2+8m(b-ma)x+4(b-ma)^2-4=0$

この x の 2 次方程式の判別式を D とすると　$D=0$

ここで

$$\frac{D}{4}=16m^2(b-ma)^2-(4m^2+1)\{4(b-ma)^2-4\}$$
$$=-4(b-ma)^2+4(4m^2+1)$$
$$=4\{(4-a^2)m^2+2abm-b^2+1\}$$

ゆえに　$(4-a^2)m^2+2abm-b^2+1=0$　…… ①

m の 2 次方程式 ① の 2 つの解を α，β とすると　$\alpha\beta=-1$

すなわち　$\dfrac{-b^2+1}{4-a^2}=-1$

よって　$a^2+b^2=5$，$a \fallingdotseq \pm 2$

[2]　$a=\pm 2$ のとき，直交する 2 本の接線は $x=\pm 2$，$y=\pm 1$ (複号任意) の組で，その交点の座標は　$(2,\ 1)$，$(2,\ -1)$，$(-2,\ 1)$，$(-2,\ -1)$

これらの点は円 $x^2+y^2=5$ 上にある。

[1]，[2] から，求める軌跡は　円 $x^2+y^2=5$

$\boxed{6}$ 放物線 $y=\dfrac{3}{4}x^2$ と楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ の共通接線の方程式を求めよ。

解答　$y=\pm 2\sqrt{3}\,x-4$

解説

共通接線と楕円の接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ $(y_1 \fallingdotseq 0)$ とすると，共通接線の方程式は

$$x_1x+\frac{y_1y}{4}=1$$

$y=\dfrac{3}{4}x^2$ を代入して　$x_1x+\dfrac{3}{16}y_1x^2=1$　すなわち　$3y_1x^2+16x_1x-16=0$

この x の 2 次方程式の判別式を D とすると　$D=0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=(8x_1)^2-3y_1(-16)=16(4x_1{}^2+3y_1)$

ゆえに，$4x_1{}^2+3y_1=0$ から　$x_1{}^2=-\dfrac{3}{4}y_1$　…… ①

また　$x_1{}^2+\dfrac{y_1{}^2}{4}=1$　① を代入して整理すると　$y_1{}^2-3y_1-4=0$

これを解いて　$y_1=-1,\ 4$

① から　$y_1=-1$ のとき　$x_1{}^2=\dfrac{3}{4}$　よって　$x_1=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$y_1=4$ のとき　$x_1{}^2=-3$　これを満たす実数 x_1 は存在しない。

したがって，求める共通接線の方程式は　$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{y}{4}=1$

すなわち　$y=\pm 2\sqrt{3}\,x-4$

別解　$y=\dfrac{3}{4}x^2$ …… ①，$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ …… ② とする。

放物線 ① と楕円 ② の共通接線は x 軸に垂直でないから，その方程式は

$y=mx+n$　…… ③　とおける。

③ を ① に代入して整理すると　$3x^2-4mx-4n=0$

直線 ③ が放物線 ① に接するから，この 2 次方程式の判別式を D とすると　$D=0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=(-2m)^2-3\cdot(-4n)=4(m^2+3n)$

よって　$m^2+3n=0$　…… ④

③ を ② に代入して整理すると　$(m^2+4)x^2+2mnx+n^2-4=0$

直線 ③ が楕円 ② に接するから，この 2 次方程式の判別式を D' とすると　$D'=0$

ここで　$\dfrac{D'}{4}=(mn)^2-(m^2+4)(n^2-4)=4(m^2-n^2+4)$

よって　$m^2-n^2+4=0$　…… ⑤　　④－⑤ から　$n^2+3n-4=0$

よって　$(n-1)(n+4)=0$　　ゆえに　$n=1,\ -4$

④ より，$n \leqq 0$ であるから　$n=-4$

よって，④ から　$m^2=12$　　ゆえに　$m=\pm 2\sqrt{3}$

したがって，求める共通接線の方程式は　$y=\pm 2\sqrt{3}\,x-4$