数学演習（２次曲線と直線）Ｒ２．２．２２

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の２次曲線と直線は共有点をもつか。共有点をもつ場合には，交点・接点の別とその点の座標を求めよ。

(1)　$4x^2-y^2=4$，$2x-3y+2=0$　　(2)　$y^2=-4x$，$y=2x-3$

(3)　$3x^2+y^2=12$，$x+2y=2\sqrt{13}$

$\boxed{2}$ 次の曲線と直線の共有点の個数を求めよ。ただし，k，m は定数とする。

(1)　$x^2+4y^2=20$，$y=x+k$　　(2)　$4x^2-y^2=4$，$y=mx$

$\boxed{3}$ (1)　m を定数とする。放物線 $y^2=-8x$ と直線 $x+my=2$ の共有点の個数を求めよ。

(2)　双曲線 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$ が直線 $y=kx+4$ とただ１つの共有点をもつとき，定数 k の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 直線 $y=4x+1$ と楕円 $4x^2+y^2=4$ が交わってできる弦の中点の座標，および長さを求めよ。

$\boxed{5}$ 楕円 $x^2+2y^2=1$ と放物線 $4y=2x^2+a$ が異なる 4 点を共有するための，定数 a の値の範囲を求めよ。

1 次の２次曲線と直線は共有点をもつか。共有点をもつ場合には，交点・接点の別とその点の座標を求めよ。

(1) $4x^2-y^2=4$，$2x-3y+2=0$　　(2) $y^2=-4x$，$y=2x-3$

(3) $3x^2+y^2=12$，$x+2y=2\sqrt{13}$

解答　(1) ２つの交点 $(-1,\ 0)$，$\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{3}{2}\right)$ をもつ　　(2) 共有点をもたない

(3) 接点 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}},\ \dfrac{12}{\sqrt{13}}\right)$ をもつ

解説

(1) $\begin{cases}4x^2-y^2=4 & \cdots\cdots ①\\ 2x-3y+2=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$ とする。

② から　$2x=3y-2$　$\cdots\cdots$ ③

③ を ① に代入すると　$(3y-2)^2-y^2=4$　　整理すると　$2y^2-3y=0$

よって　$y(2y-3)=0$　　ゆえに　$y=0,\ \dfrac{3}{2}$

③ から　$y=0$ のとき　$x=-1$，　$y=\dfrac{3}{2}$ のとき　$x=\dfrac{5}{4}$

したがって，２つの交点 $(-1,\ 0)$，$\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{3}{2}\right)$ をもつ。

(2) $\begin{cases}y^2=-4x & \cdots\cdots ①\\ y=2x-3 & \cdots\cdots ②\end{cases}$ とする。

② を ① に代入すると　$(2x-3)^2=-4x$

整理すると　$4x^2-8x+9=0$

この２次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-4)^2-4\cdot 9=-20$　すなわち　$D<0$

したがって，共有点をもたない。

(3) $\begin{cases}3x^2+y^2=12 & \cdots\cdots ①\\ x+2y=2\sqrt{13} & \cdots\cdots ②\end{cases}$ とする。

② から　$x=2(\sqrt{13}-y)$　$\cdots\cdots$ ③

③ を ① に代入すると　$3\cdot 4(\sqrt{13}-y)^2+y^2=12$

整理すると　$13y^2-24\sqrt{13}\,y+144=0$

よって　$(\sqrt{13}\,y-12)^2=0$　　ゆえに　$y=\dfrac{12}{\sqrt{13}}$

このとき，③ から　$x=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

したがって，接点 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}},\ \dfrac{12}{\sqrt{13}}\right)$ をもつ。

2 次の曲線と直線の共有点の個数を求めよ。ただし，k，m は定数とする。

(1) $x^2+4y^2=20$，$y=x+k$　　(2) $4x^2-y^2=4$，$y=mx$

解答　(1) $-5<k<5$ のとき ２個；$k=\pm 5$ のとき １個；

$k<-5$，$5<k$ のとき ０個

(2) $-2<m<2$ のとき ２個；$m\leqq -2$，$2\leqq m$ のとき ０個

解説

(1) $y=x+k$ を $x^2+4y^2=20$ に代入すると　$x^2+4(x+k)^2=20$

整理して　$5x^2+8kx+4k^2-20=0$

この２次方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(4k)^2-5\cdot(4k^2-20)=-4(k+5)(k-5)$

よって，求める共有点の個数は

$D>0$ すなわち　$-5<k<5$ のとき ２個

$D=0$ すなわち　$k=\pm 5$ のとき １個

$D<0$ すなわち　$k<-5$，$5<k$ のとき ０個

(2) $y=mx$ を $4x^2-y^2=4$ に代入して整理すると　$(4-m^2)x^2=4$　$\cdots\cdots$ ①

$4-m^2>0$（$\Longleftrightarrow$ $-2<m<2$）のとき，① は異なる２つの実数解をもつ。

$4-m^2=0$（$\Longleftrightarrow$ $m=\pm 2$）のとき，① は $0\cdot x^2=4$ となり，解をもたない。

$4-m^2<0$（$\Longleftrightarrow$ $m<-2$，$2<m$）のとき，① は実数解をもたない。

したがって，求める共有点の個数は

$-2<m<2$ のとき ２個；$m\leqq -2$，$2\leqq m$ のとき ０個

3 (1) m を定数とする。放物線 $y^2=-8x$ と直線 $x+my=2$ の共有点の個数を求めよ。

(2) 双曲線 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$ が直線 $y=kx+4$ とただ１つの共有点をもつとき，定数 k の値を求めよ。

解答　(1) $m<-1$，$1<m$ のとき ２個；$m=\pm 1$ のとき １個；$-1<m<1$ のとき ０個

(2) $k=\pm 2$，$\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

解説

(1) $y^2=-8x$　$\cdots\cdots$ ①，$x+my=2$　$\cdots\cdots$ ② とする。

② から　$x=2-my$　　① に代入して　$y^2=-8(2-my)$

整理して　$y^2-8my+16=0$

この２次方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-4m)^2-1\cdot 16=16(m+1)(m-1)$

よって，共有点の個数は　$D>0$ すなわち　$m<-1$，$1<m$ のとき ２個；

$D=0$ すなわち　$m=\pm 1$ のとき １個；

$D<0$ すなわち　$-1<m<1$ のとき ０個

(2) $y=kx+4$ を $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$ に代入して　$\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{(kx+4)^2}{4}=1$

整理すると　$(5k^2-4)x^2+40kx+100=0$　$\cdots\cdots$ ③

双曲線と直線がただ１つの共有点をもつための条件は，③ がただ１つの実数解をもつことである。

[1]　$5k^2-4\neq 0$ すなわち $k\neq\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ のとき

２次方程式 ③ の判別式を D とすると　$D=0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=(20k)^2-(5k^2-4)\cdot 100=-100(k^2-4)$

よって，$D=0$ から　$k^2=4$　　ゆえに　$k=\pm 2$

この k の値は $k\neq\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす。

[2]　$5k^2-4=0$ すなわち $k=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ のとき

③ の解は $x=-\dfrac{5}{2k}$ となり，$k=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$k=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ それぞれに対して実数解 x がただ１つ定まる。

[1]，[2] から，求める k の値は　$k=\pm 2$，$\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

4 直線 $y=4x+1$ と楕円 $4x^2+y^2=4$ が交わってできる弦の中点の座標，および長さを求めよ。

解答　順に $\left(-\dfrac{1}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$，$\dfrac{\sqrt{323}}{5}$

解説

$y=4x+1$　$\cdots\cdots$ ①，$4x^2+y^2=4$　$\cdots\cdots$ ② とする。

① を ② に代入して整理すると　$20x^2+8x-3=0$　$\cdots\cdots$ ③

直線 ① と楕円 ② の２つの交点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ とすると，x_1，x_2 は２次方程式 ③ の異なる２つの実数解である。

よって，解と係数の関係から　$x_1+x_2=-\dfrac{2}{5}$，$x_1x_2=-\dfrac{3}{20}$　$\cdots\cdots$ ④

ここで，弦 PQ の中点は線分 PQ の中点，弦 PQ の長さは線分 PQ の長さである。

線分 PQ の中点の座標は　$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ 4\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}+1\right)$

すなわち　$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ 2(x_1+x_2)+1\right)$

④ から　$\left(-\dfrac{1}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

また　$y_2-y_1=4x_2+1-(4x_1+1)=4(x_2-x_1)$

よって　$\mathrm{PQ}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(x_2-x_1)^2+\{4(x_2-x_1)\}^2=17(x_2-x_1)^2$

$=17\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\}=17\left\{\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2-4\cdot\left(-\dfrac{3}{20}\right)\right\}=\dfrac{17\cdot 19}{5^2}$

ゆえに　$\mathrm{PQ}=\sqrt{\dfrac{17\cdot 19}{5^2}}=\dfrac{\sqrt{323}}{5}$

5 楕円 $x^2+2y^2=1$ と放物線 $4y=2x^2+a$ が異なる４点を共有するための，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$-3<a<-2\sqrt{2}$

解説

$x^2+2y^2=1$，$4y=2x^2+a$ から x を消去して整理すると

$4y^2+4y-(a+2)=0$　$\cdots\cdots$ ①

$x^2=1-2y^2\geqq 0$ から　$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq y\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

与えられた楕円と放物線は y 軸に関して対称であるから，２つの曲線が異なる４つの共有点をもつための条件は，① が $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<y<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ で異なる２つの実数解をもつことである。

よって，① の判別式を D とし，$f(y)=4y^2+4y-(a+2)$ とすると，次の [1]〜[4] が同時に成り立つ。

[1]　$D>0$　　[2]　$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$　　[3]　$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$

[4]　放物線 $Y=f(y)$ の軸について　$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<$ 軸 $<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

[1]　$\dfrac{D}{4}=2^2-4\cdot\{-(a+2)\}=4(a+3)$

$D>0$ から　　$a+3>0$　　　　よって　　$a>-3$　…… ②

[2]　$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$ から　　$-a-2\sqrt{2}>0$　　　ゆえに　　$a<-2\sqrt{2}$　…… ③

[3]　$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$ から　　$-a+2\sqrt{2}>0$　　　よって　　$a<2\sqrt{2}$　…… ④

[4]　軸 $y=-\dfrac{1}{2}$ は $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<-\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を満たす。

②～④ の共通範囲を求めて　　$-3<a<-2\sqrt{2}$