数学演習（２次曲線の移動）Ｒ２．２．２１

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ (1) 楕円 $4x^2+25y^2=100$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動した楕円の方程式を求めよ。また，その焦点を求めよ。

(2) 曲線 $9x^2-4y^2-36x-24y-36=0$ の概形をかけ。

$\boxed{2}$ 次の方程式で表される曲線はどのような図形を表すか。また，焦点を求めよ。

(1) $x^2+4y^2+4x-24y+36=0$

(2) $2y^2-3x+8y+10=0$

(3) $2x^2-y^2+8x+2y+11=0$

$\boxed{3}$ 次のような 2 次曲線の方程式を求めよ。

(1) 2 点 $(4,\ 2)$，$(-2,\ 2)$ を焦点とし，長軸の長さが 10 の楕円

(2) 2 点 $(5,\ 2)$，$(5,\ -8)$ を焦点とし，焦点からの距離の差が 6 の双曲線

$\boxed{4}$ 次のような 2 次曲線の方程式を求めよ。

(1) 焦点が点 $(6,\ 3)$，準線が直線 $x=-2$ である放物線

(2) 漸近線が直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}+3$，$y=-\dfrac{x}{\sqrt{2}}+3$ で，点 $(2,\ 4)$ を通る双曲線

$\boxed{5}$ (1) 点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ を，原点 O を中心として角 θ だけ回転した点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とするとき，$X,\ Y$ をそれぞれ $x,\ y,\ \theta$ で表せ。

(2) 曲線 $5x^2+2\sqrt{3}\,xy+7y^2=16$ …… ① を，原点 O を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転して得られる曲線の方程式を求めよ。

$\boxed{6}$ 楕円 $9x^2+y^2+18kx-2(k+2)y-16k-9=0$ の長軸の長さと短軸の長さの積を最小にする実数 k の値を求めよ。

$\boxed{7}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{3}=1$ を，原点を中心として角 $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転して得られる曲線を C とする。

(1) 曲線 C の方程式を求めよ。

(2) 直線 $y=t$ が C と共有点をもつような実数 t の値の範囲を求めよ。

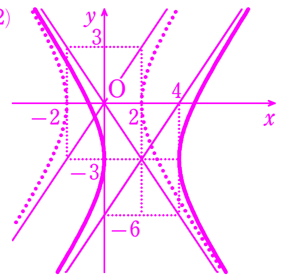
数学演習（２次曲線の移動）Ｒ２．２．２１　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

[1] (1) 楕円 $4x^2+25y^2=100$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動した楕円の方程式を求めよ。また，その焦点を求めよ。

(2) 曲線 $9x^2-4y^2-36x-24y-36=0$ の概形をかけ。

解答　(1) $4x^2+25y^2+16x-150y+141=0$,
焦点は 2 点 $(\sqrt{21}-2,\ 3)$，$(-\sqrt{21}-2,\ 3)$

(2) [図] の太い実線

(2)


解説

(1) 求める楕円の方程式は　$4(x+2)^2+25(y-3)^2=100$

すなわち　$4x^2+25y^2+16x-150y+141=0$

また，与えられた楕円の方程式は　$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$　…… ①

楕円 ① の焦点は，$\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$ から　2 点 $(\sqrt{21},\ 0)$，$(-\sqrt{21},\ 0)$

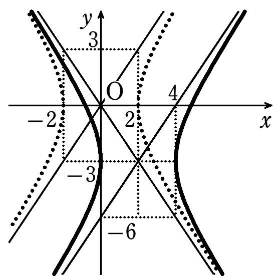
よって，求める焦点は　2 点 $(\sqrt{21}-2,\ 3)$，$(-\sqrt{21}-2,\ 3)$

(2) 与えられた曲線の方程式を変形すると

$9(x^2-4x+4)-9\cdot4-4(y^2+6y+9)+4\cdot9=36$

よって　$\dfrac{(x-2)^2}{2^2}-\dfrac{(y+3)^2}{3^2}=1$

この曲線は，双曲線 $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動したもので，その概形は図の太い実線のようになる。



[2] 次の方程式で表される曲線はどのような図形を表すか。また，焦点を求めよ。

(1) $x^2+4y^2+4x-24y+36=0$　　(2) $2y^2-3x+8y+10=0$

(3) $2x^2-y^2+8x+2y+11=0$

解答　(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動した図形；
焦点は 2 点 $(\sqrt{3}-2,\ 3)$，$(-\sqrt{3}-2,\ 3)$

(2) 放物線 $y^2=\dfrac{3}{2}x$ を x 軸方向に $\dfrac{2}{3}$，y 軸方向に -2 だけ平行移動した図形；
焦点は 点 $\left(\dfrac{25}{24},\ -2\right)$

(3) 双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=-1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した図形；焦点は 2 点 $(-2,\ \sqrt{6}+1)$，$(-2,\ -\sqrt{6}+1)$

解説

(1) $(x^2+4x+4)-4+4(y^2-6y+9)-4\cdot9+36=0$

よって　$\dfrac{(x+2)^2}{4}+(y-3)^2=1$

ゆえに，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動した図形を表す。

また，その焦点は　2 点 $(\sqrt{3}-2,\ 3)$，$(-\sqrt{3}-2,\ 3)$

(2) $2(y^2+4y+4)-2\cdot4-3x+10=0$

よって　$2(y+2)^2=3x-2$　　ゆえに　$(y+2)^2=\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$

よって，放物線 $y^2=\dfrac{3}{2}x$ を x 軸方向に $\dfrac{2}{3}$，y 軸方向に -2 だけ平行移動した図形を表す。

また，その焦点は　点 $\left(\dfrac{3}{8}+\dfrac{2}{3},\ -2\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{25}{24},\ -2\right)$

(3) $2(x^2+4x+4)-2\cdot4-(y^2-2y+1)+1+11=0$

よって　$\dfrac{(x+2)^2}{2}-\dfrac{(y-1)^2}{4}=-1$

ゆえに，双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=-1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した図形を表す。

また，その焦点は　2 点 $(-2,\ \sqrt{6}+1)$，$(-2,\ -\sqrt{6}+1)$

[3] 次のような 2 次曲線の方程式を求めよ。

(1) 2 点 $(4,\ 2)$，$(-2,\ 2)$ を焦点とし，長軸の長さが 10 の楕円

(2) 2 点 $(5,\ 2)$，$(5,\ -8)$ を焦点とし，焦点からの距離の差が 6 の双曲線

解答　(1) $\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$　　(2) $\dfrac{(x-5)^2}{16}-\dfrac{(y+3)^2}{9}=-1$

解説

(1) 2 点 $(4,\ 2)$，$(-2,\ 2)$ を結ぶ線分の中点の座標は　$(1,\ 2)$

求める楕円を x 軸方向に -1，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，焦点は 2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ に移る。

この 2 点を焦点とし，長軸の長さが 10 の楕円の方程式を，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ とすると，$2a=10$ から　$a=5$

$a^2-b^2=3^2$ から　$b^2=a^2-9=5^2-9=16$

求める楕円は，楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものであるから，その方程式は　$\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$

(2) 2 点 $(5,\ 2)$，$(5,\ -8)$ を結ぶ線分の中点の座標は　$(5,\ -3)$

求める双曲線を x 軸方向に -5，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，焦点は 2 点 $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$ に移る。

この 2 点を焦点とし，焦点からの距離の差が 6 の双曲線の方程式を，

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$ とすると，$2b=6$ から　$b=3$

$a^2+b^2=5^2$ から　$a^2=25-b^2=25-3^2=16$

求める双曲線は，双曲線 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=-1$ を x 軸方向に 5，y 軸方向に -3 だけ平行移動したものであるから，その方程式は　$\dfrac{(x-5)^2}{16}-\dfrac{(y+3)^2}{9}=-1$

[4] 次のような 2 次曲線の方程式を求めよ。

(1) 焦点が点 $(6,\ 3)$，準線が直線 $x=-2$ である放物線

(2) 漸近線が直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}+3$，$y=-\dfrac{x}{\sqrt{2}}+3$ で，点 $(2,\ 4)$ を通る双曲線

解答　(1) $(y-3)^2=16(x-2)$　　(2) $\dfrac{x^2}{2}-(y-3)^2=1$

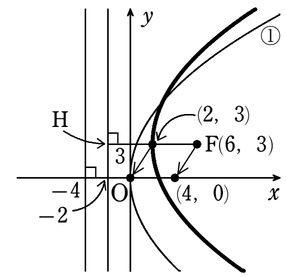
解説

(1) 焦点を $\mathrm{F}(6,\ 3)$ とし，点 F から直線 $x=-2$ に垂線 FH を下ろすと，線分 FH の中点は点 $(2,\ 3)$ であり，これが求める放物線の頂点である。

求める放物線を x 軸方向に -2，y 軸方向に -3 だけ平行移動すると，焦点 F は点 $(4,\ 0)$ に，直線 $x=-2$ は直線 $x=-4$ に移る。

点 $(4,\ 0)$ を焦点，直線 $x=-4$ を準線とする放物線の方程式は　$y^2=4\cdot4\cdot x$　すなわち　$y^2=16x$　…… ①

求める放物線は，放物線 ① を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものであるから，その方程式は　$(y-3)^2=16(x-2)$

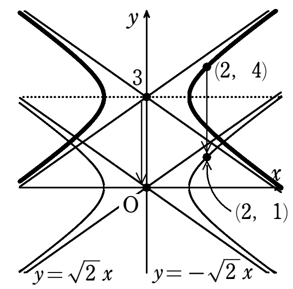


(2) 漸近線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}+3$，$y=-\dfrac{x}{\sqrt{2}}+3$ の交点は点 $(0,\ 3)$ であり，この点が求める双曲線の中心である。

求める双曲線を y 軸方向に -3 だけ平行移動すると，

直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}+3$，$y=-\dfrac{x}{\sqrt{2}}+3$ はそれぞれ直線

$y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$，$y=-\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ に移り，点 $(2,\ 4)$ は点 $(2,\ 1)$ に移る。



2 直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$，$y=-\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ を漸近線とし，点 $(2,\ 1)$

を通る双曲線の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ とすると，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から

$a=\sqrt{2}b$　…… ②　　また　$\dfrac{2^2}{a^2}-\dfrac{1^2}{b^2}=1$　…… ③

② を ③ に代入して整理すると　$b^2=1$　　$b>0$ から　$b=1$

よって，② から　$a=\sqrt{2}$

求める双曲線は，双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ を y 軸方向に 3 だけ平行移動したものであるから，その方程式は　$\dfrac{x^2}{2}-(y-3)^2=1$

[5] (1) 点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ を，原点 O を中心として角 θ だけ回転した点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とするとき，X，Y をそれぞれ x，y，θ で表せ。

(2) 曲線 $5x^2+2\sqrt{3}xy+7y^2=16$ …… ① を，原点 O を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転して得られる曲線の方程式を求めよ。

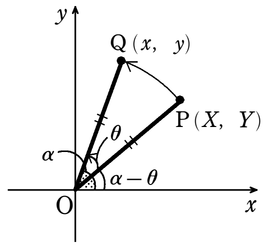
解答　(1) $X=x\cos\theta+y\sin\theta$，$Y=-x\sin\theta+y\cos\theta$　　(2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

解説

(1)　複素数平面上において，点 $\mathrm{Q}(x+yi)$ を，原点 O を中心として $-\theta$ だけ回転した点が $\mathrm{P}(X+Yi)$ であるから

$$X+Yi=\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}(x+yi)=(\cos\theta-i\sin\theta)(x+yi)$$
$$=x\cos\theta+y\sin\theta+(-x\sin\theta+y\cos\theta)i$$

よって　$X=x\cos\theta+y\sin\theta$，$Y=-x\sin\theta+y\cos\theta$



別解　動径 OQ が x 軸の正の向きとなす角を α とすると，動径 OP が x 軸の正の向きとなす角は $\alpha-\theta$ である。

また，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=r$ とすると　$x=r\cos\alpha$，$y=r\sin\alpha$

よって　$X=r\cos(\alpha-\theta)=r\cos\alpha\cos\theta+r\sin\alpha\sin\theta$
$=x\cos\theta+y\sin\theta$

$Y=r\sin(\alpha-\theta)=r\sin\alpha\cos\theta-r\cos\alpha\sin\theta$
$=-x\sin\theta+y\cos\theta$

(2)　曲線 ① 上の点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ を，原点 O を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると，(1) の結果から

$$X=x\cos\frac{\pi}{6}+y\sin\frac{\pi}{6},\ Y=-x\sin\frac{\pi}{6}+y\cos\frac{\pi}{6}$$

よって　$2X=\sqrt{3}x+y$，$2Y=-x+\sqrt{3}y$　……②

$5X^2+2\sqrt{3}XY+7Y^2=16$ であり，この等式の両辺に 4 を掛けると

$$5(2X)^2+2\sqrt{3}\cdot 2X\cdot 2Y+7(2Y)^2=64$$

② を代入して　$5(\sqrt{3}x+y)^2+2\sqrt{3}(\sqrt{3}x+y)(-x+\sqrt{3}y)+7(-x+\sqrt{3}y)^2=64$

整理すると　$16x^2+32y^2=64$

よって，求める曲線の方程式は　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

6　楕円 $9x^2+y^2+18kx-2(k+2)y-16k-9=0$ の長軸の長さと短軸の長さの積を最小にする実数 k の値を求めよ。

解答　$k=-1$

解説

与えられた方程式から

$$(9x^2+18kx+9k^2)-9k^2+\{y^2-2(k+2)y+(k+2)^2\}-(k+2)^2-16k-9=0$$

よって　$9(x+k)^2+\{y-(k+2)\}^2=10k^2+20k+13$

$10k^2+20k+13=10(k+1)^2+3>0$ であるから，与えられた方程式はすべての実数 k に対して楕円を表す。

$10(k+1)^2+3=r$ とおくと　$\dfrac{(x+k)^2}{\left(\dfrac{\sqrt{r}}{3}\right)^2}+\dfrac{\{y-(k+2)\}^2}{(\sqrt{r})^2}=1$

よって，長軸の長さと短軸の長さの積は　$2\cdot\dfrac{\sqrt{r}}{3}\times 2\sqrt{r}=\dfrac{4}{3}r=\dfrac{4}{3}\{10(k+1)^2+3\}$

これが最小となる k の値は　$k=-1$

7　楕円 $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{3}=1$ を，原点を中心として角 $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転して得られる曲線を C とする。

(1)　曲線 C の方程式を求めよ。

(2)　直線 $y=t$ が C と共有点をもつような実数 t の値の範囲を求めよ。

解答　(1)　$4x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2=21$　(2)　$-2\leqq t\leqq 2$

解説

(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ を，原点を中心として角 $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると，複素数平面上の点の回転を考えることにより，次の等式が成り立つ。　$X+Yi=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}(x+yi)$　……①

① から　$X+Yi=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}(x+yi)=\dfrac{\sqrt{3}x+y}{2}+\dfrac{-x+\sqrt{3}y}{2}i$

よって　$X=\dfrac{\sqrt{3}x+y}{2}$，$Y=\dfrac{-x+\sqrt{3}y}{2}$

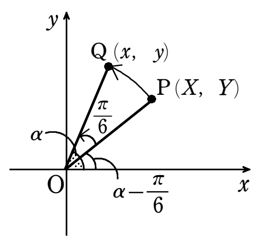
ゆえに　$2X=\sqrt{3}x+y$，$2Y=-x+\sqrt{3}y$　……②

また，$\dfrac{X^2}{7}+\dfrac{Y^2}{3}=1$ すなわち $12X^2+28Y^2=84$ であるから，② を代入して整理すると

$4x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2=21$　……③

これが求める曲線 C の方程式である。

別解　動径 OQ が x 軸の正の向きとなす角を α とすると，動径 OP が x 軸の正の向きとなす角は $\alpha-\dfrac{\pi}{6}$ である。



また，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=r$ とすると
$x=r\cos\alpha$，$y=r\sin\alpha$

よって　$X=r\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$
$=r\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{6}+r\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}x+y}{2}$

$Y=r\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=r\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{6}-r\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{-x+\sqrt{3}y}{2}$

これから ② が導かれる。以後は同様。

(2)　③ に $y=t$ を代入すると　$4x^2-2\sqrt{3}tx+6t^2-21=0$　……④

直線 $y=t$ が C と共有点をもつための条件は，x の 2 次方程式 ④ が実数解をもつことである。すなわち，④ の判別式を D とすると　$D\geqq 0$

$\dfrac{D}{4}=(-\sqrt{3}t)^2-4(6t^2-21)=-21(t^2-4)=-21(t+2)(t-2)$ であるから

$(t+2)(t-2)\leqq 0$　　よって　$-2\leqq t\leqq 2$