数学演習（双曲線）Ｒ２．２．２０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の双曲線の焦点と漸近線を求めよ。また，その概形をかけ。

(1) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　　(2) $9x^2-25y^2=-225$

$\boxed{2}$ 次のような双曲線の方程式を求めよ。

(1) 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の差が 6

(2) 漸近線が直線 $y=\pm 2x$ で，点 $(3,\ 0)$ を通る。

(3) 中心が原点で，漸近線が直交し，焦点の 1 つが点 $(3,\ 0)$

$\boxed{3}$ (1) 双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 P と点 A $(0,\ 2)$ の距離を最小にする P の座標と，そのときの距離を求めよ。

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点 P と定点 A $(a,\ 0)$ の距離の最小値を求めよ。ただし，a は実数の定数とする。

$\boxed{4}$ 2 つの直線 $y=x$, $y=-x$ 上にそれぞれ点 A，B がある。△OAB の面積が k (k は定数) のとき，線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P の軌跡を求めよ。ただし，O は原点とする。

$\boxed{5}$ 点 P$(x,\ y)$ が双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 上を動くとき，点 P$(x,\ y)$ と点 A$(a,\ 0)$ との距離の最小値を $f(a)$ とする。$f(a)$ を a で表せ。ただし，$a \geqq 0$ とする。

数学演習（双曲線）Ｒ２．２．２０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1 次の双曲線の焦点と漸近線を求めよ。また，その概形をかけ。

(1) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　　(2) $9x^2-25y^2=-225$

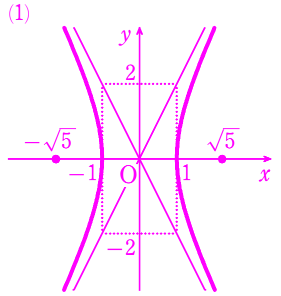
解答 (1) 焦点は 2 点 $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$，漸近線は 2 直線 $x-\dfrac{y}{2}=0$，$x+\dfrac{y}{2}=0$，

［図］

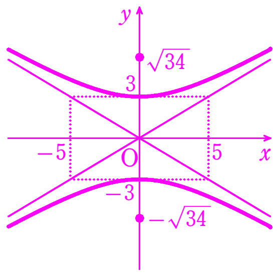
(2) 焦点は 2 点 $(0,\ \sqrt{34})$，$(0,\ -\sqrt{34})$，漸近線は 2 直線 $\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{3}=0$，$\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=0$，

［図］

(1)



(2)



解説

(1) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ から　$\dfrac{x^2}{1^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$

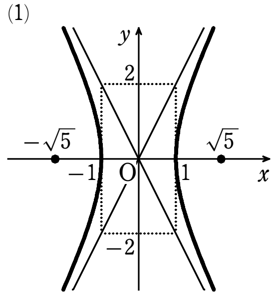
$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ から，焦点は

2 点 $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

漸近線は　2 直線 $x-\dfrac{y}{2}=0$，$x+\dfrac{y}{2}=0$

概形は　図 (1)

(1)



(2) $9x^2-25y^2=-225$ の両辺を 225 で割ると

$\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=-1$

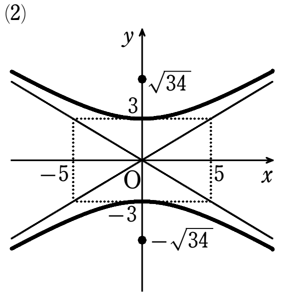
$\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$ から，焦点は

2 点 $(0,\ \sqrt{34})$，$(0,\ -\sqrt{34})$

漸近線は　2 直線 $\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{3}=0$，$\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=0$

概形は　図 (2)

(2)



2 次のような双曲線の方程式を求めよ。

(1) 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の差が 6

(2) 漸近線が直線 $y=\pm 2x$ で，点 $(3,\ 0)$ を通る。

(3) 中心が原点で，漸近線が直交し，焦点の 1 つが点 $(3,\ 0)$

解答 (1) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$　(2) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{36}=1$　(3) $\dfrac{2}{9}x^2-\dfrac{2}{9}y^2=1$

解説

(1) 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とするから，求める双曲線の方程式は

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ とおける。

このとき，焦点からの距離の差は $2a$ であるから，$2a=6$ より　$a=3$

また　$a^2+b^2=4^2$　よって　$b^2=4^2-a^2=16-3^2=7$

したがって　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$

別解 $\mathrm{F}(4,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-4,\ 0)$ とし，双曲線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'|=6$ であるから　$\sqrt{(x-4)^2+y^2}-\sqrt{(x+4)^2+y^2}=\pm 6$

ゆえに　$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\sqrt{(x+4)^2+y^2}\pm 6$

両辺を平方して整理すると　$16x+36=\pm 12\sqrt{(x+4)^2+y^2}$

両辺を 4 で割り，更に平方すると　$16x^2+72x+81=9(x^2+8x+16+y^2)$

よって　$7x^2-9y^2=63$ ……①

逆に，① を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'|=6$ を満たす。

したがって　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$

(2) 与えられた条件から，求める双曲線の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ とおける。

漸近線が直線 $y=\pm 2x$ であるから　$\dfrac{b}{a}=2$　ゆえに　$b=2a$ ……①

また，点 $(3,\ 0)$ を通るから　$\dfrac{9}{a^2}=1$　よって　$a^2=9$

$a>0$ であるから　$a=3$　① から　$b=6$

したがって　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{36}=1$

別解 漸近線が直線 $y=\pm 2x$ であるから，求める双曲線の方程式は

$x^2-\dfrac{y^2}{2^2}=k$ $(k\neq 0)$ とおける。

点 $(3,\ 0)$ を通るから　$k=9$　よって　$x^2-\dfrac{y^2}{4}=9$

すなわち　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{36}=1$

(3) 与えられた条件から，求める双曲線の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ とおける。

漸近線が直交するから　$\dfrac{b}{a}\cdot\left(-\dfrac{b}{a}\right)=-1$　よって　$a^2=b^2$ ……①

焦点の 1 つが点 $(3,\ 0)$ であるから　$a^2+b^2=3^2$

① を代入して　$2a^2=9$　ゆえに　$a^2=\dfrac{9}{2}$

また　$b^2=\dfrac{9}{2}$　したがって　$\dfrac{2}{9}x^2-\dfrac{2}{9}y^2=1$

3 (1) 双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 P と点 $\mathrm{A}(0,\ 2)$ の距離を最小にする P の座標と，そのときの距離を求めよ。

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点 P と定点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ の距離の最小値を求めよ。ただし，a は実数の定数とする。

解答 (1) $\mathrm{P}\left(\pm\dfrac{\sqrt{17}}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

(2) $a<-\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $|a+2|$，$-\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{-\dfrac{1}{3}a^2+1}$，

$\dfrac{3}{2}<a$ のとき最小値 $|a-2|$

解説

(1) $\mathrm{P}(s,\ t)$ とすると　$s\leqq -1,\ 1\leqq s$

点 P は双曲線上にあるから，$s^2-\dfrac{t^2}{2}=1$ より　$s^2=1+\dfrac{t^2}{2}$ ……①

ゆえに　$\mathrm{PA}^2=s^2+(t-2)^2=\left(1+\dfrac{t^2}{2}\right)+t^2-4t+4=\dfrac{3}{2}t^2-4t+5$

$=\dfrac{3}{2}\left(t-\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{7}{3}$

よって，PA^2 は $t=\dfrac{4}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{7}{3}$ をとる。

このとき，① から　$s^2=\dfrac{17}{9}$　ゆえに　$s=\pm\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

これは $s\leqq -1,\ 1\leqq s$ を満たす。

$\mathrm{PA}>0$ であるから，PA^2 が最小となるとき PA も最小となる。

よって，PA は $\mathrm{P}\left(\pm\dfrac{\sqrt{17}}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ をとる。

(2) $\mathrm{P}(s,\ t)$ とすると　$-2\leqq s\leqq 2$

点 P は楕円上にあるから　$\dfrac{s^2}{4}+t^2=1$　よって　$t^2=1-\dfrac{s^2}{4}$

ゆえに　$\mathrm{PA}^2=(s-a)^2+t^2=s^2-2as+a^2+\left(1-\dfrac{s^2}{4}\right)=\dfrac{3}{4}s^2-2as+a^2+1$

$=\dfrac{3}{4}\left(s-\dfrac{4}{3}a\right)^2-\dfrac{1}{3}a^2+1$ $(-2\leqq s\leqq 2)$

[1] $\dfrac{4}{3}a<-2$ すなわち $a<-\dfrac{3}{2}$ のとき

PA^2 は $s=-2$ のとき最小値 $(a+2)^2$ をとる。

[2] $-2\leqq\dfrac{4}{3}a\leqq 2$ すなわち $-\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

PA^2 は $s=\dfrac{4}{3}a$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{3}a^2+1$ をとる。

[3] $2<\dfrac{4}{3}a$ すなわち $\dfrac{3}{2}<a$ のとき

PA^2 は $s=2$ のとき最小値 $(a-2)^2$ をとる。

$\mathrm{PA}\geqq 0$ より，PA^2 が最小となるとき PA は最小となるから

$a<-\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $|a+2|$，$-\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{-\dfrac{1}{3}a^2+1}$，

$\dfrac{3}{2}<a$ のとき最小値 $|a-2|$

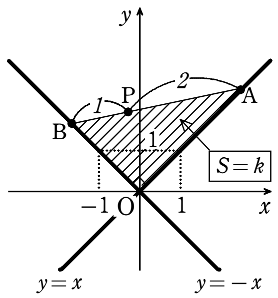
4 2 つの直線 $y=x$，$y=-x$ 上にそれぞれ点 A，B がある。△OAB の面積が k（k は定数）のとき，線分 AB を $2:1$ に内分する点 P の軌跡を求めよ。ただし，O は原点とする。

解答 双曲線 $x^2-y^2=\pm\dfrac{8}{9}k$

解説

点 A，B は，それぞれ直線 $y=x$，$y=-x$ 上にあるから，$st\neq 0$ として，A $(s,\ s)$，B $(t,\ -t)$ とする。
△OAB の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}|s\cdot(-t)-s\cdot t|=|st|$$



$S=k$ であるから　　$|st|=k$　…… ①
P $(x,\ y)$ とすると，点 P は線分 AB を 2 : 1 に内分するから　　$x=\dfrac{1\cdot s+2\cdot t}{2+1}$，$y=\dfrac{1\cdot s-2\cdot t}{2+1}$

よって　　$s=\dfrac{3}{2}(x+y)$，$t=\dfrac{3}{4}(x-y)$　…… ②

② を ① に代入して　　$\dfrac{9}{8}|x^2-y^2|=k$

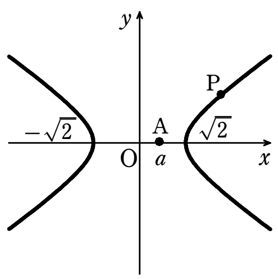
ゆえに，求める軌跡は　　双曲線 $x^2-y^2=\pm\dfrac{8}{9}k$

5 点 P $(x,\ y)$ が双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 上を動くとき，点 P $(x,\ y)$ と点 A $(a,\ 0)$ との距離の最小値を $f(a)$ とする。$f(a)$ を a で表せ。ただし，$a\geqq 0$ とする。

解答　$0\leqq a<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき $f(a)=|a-\sqrt{2}|$，$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a$ のとき $f(a)=\sqrt{\dfrac{a^2}{3}-1}$

解説

$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ から　　$y^2=\dfrac{x^2}{2}-1$



$y^2\geqq 0$ であるから　　$\dfrac{x^2}{2}-1\geqq 0$

ゆえに　　$x\leqq-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\leqq x$
$a\geqq 0$ のとき，AP が最小となるような点 P は，双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ の $x\geqq\sqrt{2}$ の部分にある。

$y^2=\dfrac{x^2}{2}-1$ であるから，$x\geqq\sqrt{2}$ のとき

$$\mathrm{AP}^2=(x-a)^2+y^2=(x-a)^2+\frac{x^2}{2}-1=\frac{3}{2}x^2-2ax+a^2-1$$

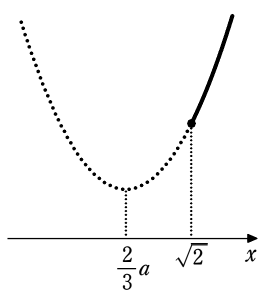
$$=\frac{3}{2}\left(x-\frac{2}{3}a\right)^2+\frac{a^2}{3}-1$$

[1]　$0\leqq\dfrac{2}{3}a<\sqrt{2}$ すなわち $0\leqq a<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき

AP^2 は $x=\sqrt{2}$ のとき最小で，最小値は

$$(\sqrt{2}-a)^2+1-1=(a-\sqrt{2})^2$$

よって　　$f(a)=|a-\sqrt{2}|$

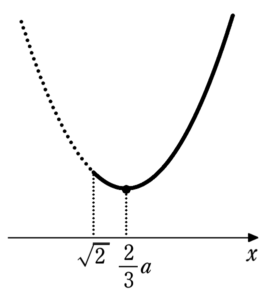


[2]　$\sqrt{2}\leqq\dfrac{2}{3}a$ すなわち $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a$ のとき

AP^2 は $x=\dfrac{2}{3}a$ のとき最小で，最小値は　　$\dfrac{a^2}{3}-1$

$a^2\geqq\dfrac{9}{2}$ より，$\dfrac{a^2}{3}-1>0$ であるから

$$f(a)=\sqrt{\frac{a^2}{3}-1}$$



[1]，[2] から

$0\leqq a<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき　$f(a)=|a-\sqrt{2}|$

$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a$ のとき　　$f(a)=\sqrt{\dfrac{a^2}{3}-1}$