数学演習（楕円）Ｒ２．２．１９　　(　)組(　)番　名前(　　　　)

$\boxed{1}$ 次の楕円の長軸・短軸の長さ，焦点を求めよ。また，その概形をかけ。

(1) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　(2) $25x^2+16y^2=400$

$\boxed{2}$ 次のような楕円の方程式を求めよ。

(1) 2 点 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ を焦点とし，この 2 点からの距離の和が 6

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{5}=1$ と焦点が一致し，短軸の長さが 4

(3) 長軸が x 軸上，短軸が y 軸上にあり，2 点 $(-2,\ 0)$, $\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る。

$\boxed{3}$ 円 $x^2+y^2=9$ を次のように拡大または縮小した楕円の方程式と焦点を求めよ。

(1) x 軸をもとにして y 軸方向に 3 倍に拡大

(2) y 軸をもとにして x 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍に縮小

$\boxed{4}$ x 軸上の動点 P$(a,\ 0)$，y 軸上の動点 Q$(0,\ b)$ が PQ$=1$ を満たしながら動くとき，線分 PQ を $1:2$ に内分する点 T の軌跡の方程式を求め，その概形を図示せよ。

$\boxed{5}$ d を正の定数とする。2 点 A$(-d,\ 0)$，B$(d,\ 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える。

(1) 楕円 E の 長軸と短軸の長さを求めよ。

(2) $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ および $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$ を，OP と d を用いて表せ (O は原点)。

(3) 点 P が楕円 E 全体を動くとき，$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ。

$\boxed{6}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接する正方形の 1 辺の長さは ${}^{ア}\boxed{}$ である。また，この楕円に内接する長方形の面積の最大値は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{7}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点 P と定点 A $(a,\ 0)$ の距離の最小値を求めよ。ただし，a は実数の定数とする。

数学演習（楕円）R２．２．１９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

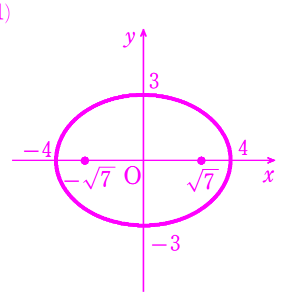
$\boxed{1}$ 次の楕円の長軸・短軸の長さ，焦点を求めよ。また，その概形をかけ。

(1) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　　(2) $25x^2+16y^2=400$

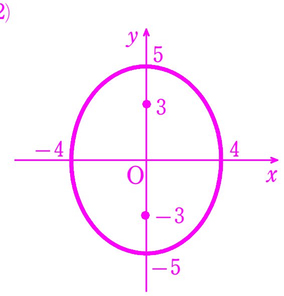
解答 (1) 長軸の長さは 8，短軸の長さは 6，焦点は 2 点 $(\sqrt{7},\ 0)$，$(-\sqrt{7},\ 0)$，[図]

(2) 長軸の長さは 10，短軸の長さは 8，焦点は 2 点 $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$，[図]

(1)



(2)



解説

(1) $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ から　長軸の長さは　$2\cdot4=8$　　短軸の長さは　$2\cdot3=6$

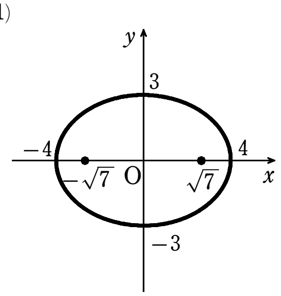
焦点は，$\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ から　2 点 $(\sqrt{7},\ 0)$，$(-\sqrt{7},\ 0)$　　また，概形は　図 (1)

(2) $25x^2+16y^2=400$ から　$\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$

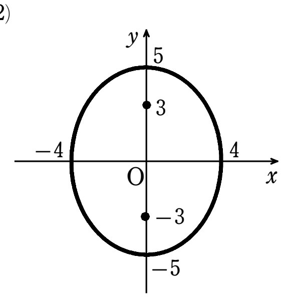
長軸の長さは　$2\cdot5=10$　　短軸の長さは　$2\cdot4=8$

焦点は，$\sqrt{5^2-4^2}=3$ から　2 点 $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$　　また，概形は　図 (2)

(1)



(2)



$\boxed{2}$ 次のような楕円の方程式を求めよ。

(1) 2 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を焦点とし，この 2 点からの距離の和が 6

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{5}=1$ と焦点が一致し，短軸の長さが 4

(3) 長軸が x 軸上，短軸が y 軸上にあり，2 点 $(-2,\ 0)$，$\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る。

解答 (1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$　　(2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{6}=1$　　(3) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

解説

(1) 2 点 $\mathrm{F}(2,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-2,\ 0)$ を焦点とするから，求める楕円の方程式は

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ とおける。

ここで　$a^2-b^2=2^2$

また，楕円上の任意の点 P について　　$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2a$

よって　$2a=6$　　ゆえに　$a=3$

よって　$b^2=a^2-2^2=3^2-4=5$

したがって　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

別解 楕円上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

$\mathrm{F}(2,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-2,\ 0)$ とすると，$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=6$ であるから

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=6$$

よって　$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=6-\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

両辺を平方して整理すると　$12\sqrt{(x+2)^2+y^2}=8x+36$

両辺を 4 で割り，更に平方すると　$9(x^2+4x+4+y^2)=4x^2+36x+81$

整理して　$5x^2+9y^2=45$　　したがって　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{5}=1$ の焦点は，$\sqrt{5-3}=\sqrt{2}$ であることから

2 点 $(0,\ \sqrt{2})$，$(0,\ -\sqrt{2})$

ゆえに，求める楕円の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$ とおくと，$\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{2}$

であるから　$b^2-a^2=2$

また，短軸の長さは　$2a$　　よって，$2a=4$ から　$a=2$

ゆえに　$b^2=a^2+2=2^2+2=6$　　よって　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{6}=1$

(3) 長軸が x 軸上，短軸が y 軸上にあるから，求める楕円の中心は原点であり，その方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ とおける。

点 $(-2,\ 0)$ を通るから　$\dfrac{(-2)^2}{a^2}=1$　……①

点 $\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通るから　$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$　……②

① から　$a^2=4$　　② に代入して　$\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4b^2}=1$

ゆえに　$b^2=1$　　したがって　$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

$\boxed{3}$ 円 $x^2+y^2=9$ を次のように拡大または縮小した楕円の方程式と焦点を求めよ。

(1) x 軸をもとにして y 軸方向に 3 倍に拡大

(2) y 軸をもとにして x 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍に縮小

解答 (1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{81}=1$，焦点は 2 点 $(0,\ 6\sqrt{2})$，$(0,\ -6\sqrt{2})$

(2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，焦点は 2 点 $(0,\ \sqrt{5})$，$(0,\ -\sqrt{5})$

解説

円周上の点を $\mathrm{Q}(s,\ t)$ とすると　$s^2+t^2=9$　……①

(1) 点 Q が移された点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると　$x=s$，$y=3t$

よって　$s=x$，$t=\dfrac{1}{3}y$　　これらを ① に代入して　$x^2+\dfrac{1}{9}y^2=9$

ゆえに，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{81}=1$ になる。

また，この楕円の焦点は，$\sqrt{81-9}=6\sqrt{2}$ であることから

2 点 $(0,\ 6\sqrt{2})$，$(0,\ -6\sqrt{2})$

(2) 点 Q が移された点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$x=\dfrac{2}{3}s$，$y=t$

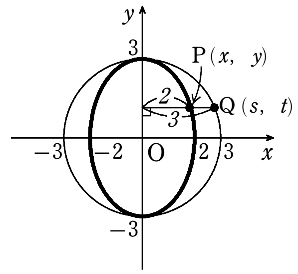
よって　$s=\dfrac{3}{2}x$，$t=y$

これらを ① に代入して　$\dfrac{9}{4}x^2+y^2=9$

ゆえに，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ になる。

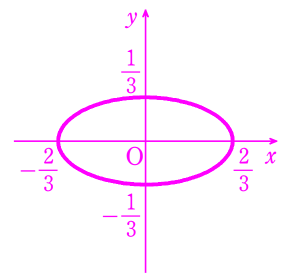
また，この楕円の焦点は，$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ であることから

2 点 $(0,\ \sqrt{5})$，$(0,\ -\sqrt{5})$



$\boxed{4}$ x 軸上の動点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$，y 軸上の動点 $\mathrm{Q}(0,\ b)$ が $\mathrm{PQ}=1$ を満たしながら動くとき，線分 PQ を 1 : 2 に内分する点 T の軌跡の方程式を求め，その概形を図示せよ。

解答 $9x^2+36y^2=4$，[図]



解説

$\mathrm{T}(x,\ y)$ とする。

$\mathrm{PQ}=1$ であるから　$\mathrm{PQ}^2=1$

よって　$a^2+b^2=1$　……①

点 T は線分 PQ を 1 : 2 に内分するから

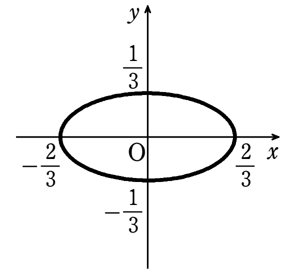
$$x=\frac{2\cdot a+1\cdot 0}{1+2},\quad y=\frac{2\cdot 0+1\cdot b}{1+2}$$

ゆえに　$a=\dfrac{3}{2}x$，$b=3y$

これらを ① に代入して　$\dfrac{9}{4}x^2+9y^2=1$

よって　$9x^2+36y^2=4$

ゆえに，点 T の軌跡は楕円 $9x^2+36y^2=4$ で，その概形は右図。



$\boxed{5}$ d を正の定数とする。2 点 $\mathrm{A}(-d,\ 0)$，$\mathrm{B}(d,\ 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える。

(1) 楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ。

(2) $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ および $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$ を，OP と d を用いて表せ (O は原点)。

(3) 点 P が楕円 E 全体を動くとき，$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ。

解答 (1) 長軸の長さ $4d$，短軸の長さ $2\sqrt{3}\,d$

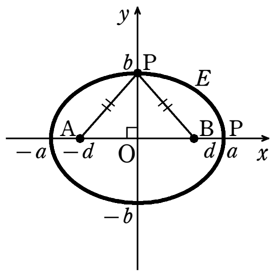
(2)　$AP^2+BP^2=2OP^2+2d^2$，$AP\cdot BP=7d^2-OP^2$

(3)　$OP=2d$ のとき最大値 $28d^3$，$OP=\sqrt{3}\,d$ のとき最小値 $16d^3$

解説

(1)　長軸の長さを $2a$，短軸の長さを $2b$ とすると，$a>b>0$ であり，条件から楕円 E の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad とおける。$$



点 A，B は楕円 E の焦点であるから　$AP+BP=2a$

よって　$2a=4d$　　ゆえに　$a=2d$

また，$a^2-b^2=d^2$ から

$$b^2=a^2-d^2=4d^2-d^2=3d^2$$

$b>0$，$d>0$ から　$b=\sqrt{3}\,d$

したがって　長軸の長さは $4d$，短軸の長さは $2\sqrt{3}\,d$

(2)　$P(x,\ y)$ とすると

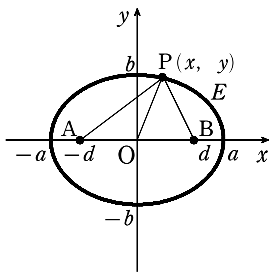
$$AP^2=(x+d)^2+y^2,\quad BP^2=(x-d)^2+y^2$$

よって　$AP^2+BP^2=2(x^2+y^2)+2d^2=2OP^2+2d^2$

また，$AP+BP=4d$ であるから

$$AP\cdot BP=\frac{1}{2}\{(AP+BP)^2-(AP^2+BP^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(4d)^2-(2OP^2+2d^2)\}=7d^2-OP^2$$



別解　AP^2+BP^2 の求め方。

原点 O は辺 AB の中点であるから，△PAB において中線定理により

$$AP^2+BP^2=2(OP^2+OA^2)=2OP^2+2d^2$$

(3)　$AP^3+BP^3=(AP+BP)^3-3AP\cdot BP(AP+BP)$

$$=(4d)^3-3(7d^2-OP^2)\cdot 4d$$

$$=12dOP^2-20d^3$$

(1) より，$b\leqq OP\leqq a$ すなわち $\sqrt{3}\,d\leqq OP\leqq 2d$ であるから

AP^3+BP^3 は　$OP=2d$ のとき最大値 $12d\cdot 4d^2-20d^3=28d^3$,

$OP=\sqrt{3}\,d$ のとき最小値 $12d\cdot 3d^2-20d^3=16d^3$　をとる。

6　楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接する正方形の 1 辺の長さは ア $\boxed{}$ である。また，この楕円に内接する長方形の面積の最大値は イ $\boxed{}$ である。

解答　(ア)　$\dfrac{12}{\sqrt{13}}$　　(イ)　12

解説

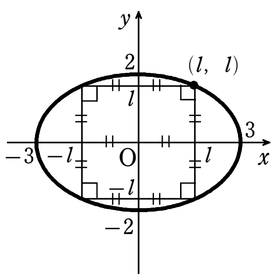
楕円に内接する正方形の 1 辺の長さを $2l$ とすると，

第 1 象限にある正方形の頂点の座標は　$(l,\ l)$

これが楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上にあるから

$$\frac{l^2}{9}+\frac{l^2}{4}=1$$

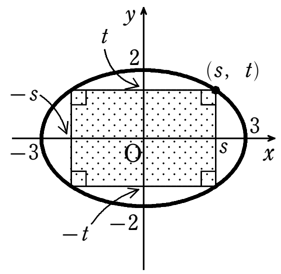
よって　$l^2=\dfrac{36}{13}$　　$l>0$ であるから　$l=\dfrac{6}{\sqrt{13}}$



ゆえに，楕円に内接する正方形の 1 辺の長さは

$$2l={}^{ア}\frac{12}{\sqrt{13}}$$

また，楕円に内接する長方形の第 1 象限にある頂点の座標を $(s,\ t)$ $(s>0,\ t>0)$ とすると，長方形の面積 S は　　$S=2s\cdot 2t=4st$



点 $(s,\ t)$ は楕円上にあるから　$\dfrac{s^2}{9}+\dfrac{t^2}{4}=1$　…… ①

$\dfrac{s^2}{9}>0$，$\dfrac{t^2}{4}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$\frac{s^2}{9}+\frac{t^2}{4}\geqq 2\sqrt{\frac{s^2}{9}\cdot\frac{t^2}{4}}=\frac{1}{3}st$$

よって，① から　$1\geqq\dfrac{1}{3}st$

ゆえに　$4st\leqq 12$　すなわち　$S\leqq 12$

等号は，$\dfrac{s^2}{9}=\dfrac{t^2}{4}=\dfrac{1}{2}$ のとき成り立つ。このとき，$s^2=\dfrac{9}{2}$，$t^2=2$ で，$s>0$，$t>0$ から

$$s=\frac{3}{\sqrt{2}},\quad t=\sqrt{2}$$

したがって，面積 S の最大値は　イ 12

7　楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点 P と定点 $A(a,\ 0)$ の距離の最小値を求めよ。ただし，a は実数の定数とする。

解答　$a<-\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $|a+2|$，$-\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{-\dfrac{1}{3}a^2+1}$，

$\dfrac{3}{2}<a$ のとき最小値 $|a-2|$

解説

$P(s,\ t)$ とすると　$-2\leqq s\leqq 2$

点 P は楕円上にあるから　$\dfrac{s^2}{4}+t^2=1$　　よって　$t^2=1-\dfrac{s^2}{4}$

ゆえに　$PA^2=(s-a)^2+t^2=s^2-2as+a^2+\left(1-\dfrac{s^2}{4}\right)=\dfrac{3}{4}s^2-2as+a^2+1$

$$=\frac{3}{4}\left(s-\frac{4}{3}a\right)^2-\frac{1}{3}a^2+1\ (-2\leqq s\leqq 2)$$

[1]　$\dfrac{4}{3}a<-2$ すなわち $a<-\dfrac{3}{2}$ のとき

PA^2 は $s=-2$ のとき最小値 $(a+2)^2$ をとる。

[2]　$-2\leqq\dfrac{4}{3}a\leqq 2$ すなわち $-\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

PA^2 は $s=\dfrac{4}{3}a$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{3}a^2+1$ をとる。

[3]　$2<\dfrac{4}{3}a$ すなわち $\dfrac{3}{2}<a$ のとき

PA^2 は $s=2$ のとき最小値 $(a-2)^2$ をとる。

$PA\geqq 0$ より，PA^2 が最小となるとき PA は最小となるから

$a<-\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $|a+2|$，$-\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{-\dfrac{1}{3}a^2+1}$，

$\dfrac{3}{2}<a$ のとき最小値 $|a-2|$