数学演習（放物線）Ｒ２．２．１８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ (1)　焦点が点 $(2,\ 0)$，準線が直線 $x=-2$ である放物線の方程式を求めよ。また，その概形をかけ。

(2)　次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

(ア)　$y^2=-3x$　　　(イ)　$y=2x^2$

(3)　点 $\mathrm{F}(4,\ 0)$ を通り，直線 ℓ: $x=-4$ に接する円の中心 P の軌跡を求めよ。

$\boxed{2}$ (1)　放物線 $x^2=-8y$ の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

(2)　点 $(3,\ 0)$ を通り，直線 $x=-3$ に接する円の中心の軌跡を求めよ。

(3)　頂点が原点で，焦点が x 軸上にあり，点 $(9,\ -6)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$ 円 $(x-4)^2+y^2=1$ と直線 $x=-3$ の両方に接する円の中心 P の軌跡を求めよ。

$\boxed{4}$ 半円 $x^2+y^2=36$，$x \geqq 0$ および y 軸の $-6 \leqq y \leqq 6$ の部分の，両方に接する円の中心 P の軌跡を求めよ。

$\boxed{5}$ a，b を実数とし，$b<a$ とする。焦点が点 $(0,\ a)$，準線が直線 $y=b$ である放物線を P で表すことにする。すなわち，P は点 $(0,\ a)$ からの距離と直線 $y=b$ からの距離が等しい点の軌跡である。

(1) 放物線 P の方程式を求めよ。

(2) 焦点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 $a-b$ の円を C とする。このとき，円 C と放物線 P の交点の座標を求めよ。

$\boxed{6}$ 放物線 $y^2=6x$ 上の点 P と，定点 A $(a,\ 0)$ の距離の最小値を求めよ。ただし，a は実数の定数とする。

数学演習（放物線）Ｒ２．２．１８　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1 (1) 焦点が点 $(2,\ 0)$，準線が直線 $x=-2$ である放物線の方程式を求めよ。また，その概形をかけ。

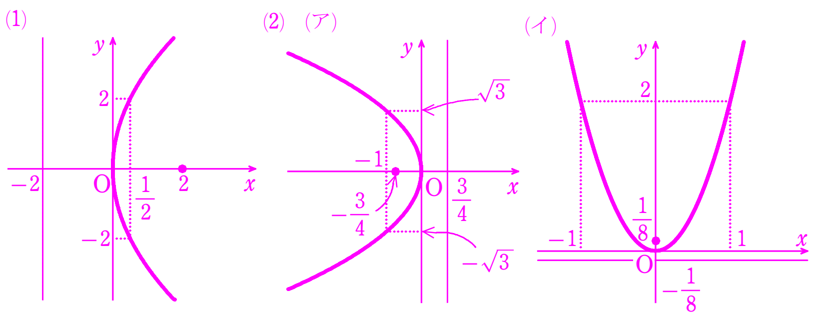
(2) 次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

（ア）$y^2=-3x$　　　　（イ）$y=2x^2$

(3) 点 $\mathrm{F}(4,\ 0)$ を通り，直線 ℓ: $x=-4$ に接する円の中心 P の軌跡を求めよ。

解答 (1) $y^2=8x$，[図]　(2)（ア）焦点 点 $\left(-\dfrac{3}{4},\ 0\right)$，準線 直線 $x=\dfrac{3}{4}$，[図]

（イ）焦点 点 $\left(0,\ \dfrac{1}{8}\right)$，準線 直線 $y=-\dfrac{1}{8}$，[図]　(3) 放物線 $y^2=16x$



解説

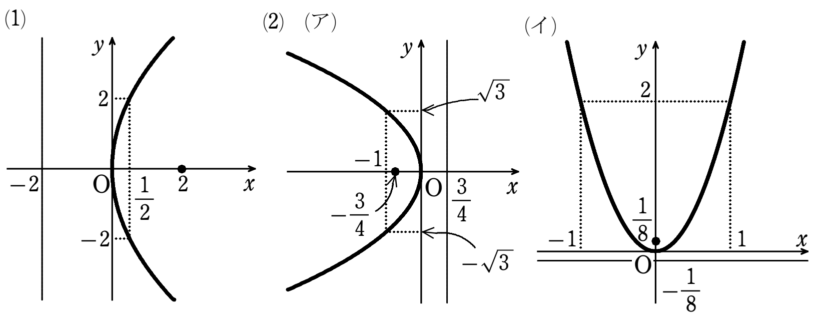
(1) $y^2=4\cdot2\cdot x$　すなわち　$y^2=8x$　概形は　図 (1)

(2)（ア）$y^2=4\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)x$　よって，焦点は　点 $\left(-\dfrac{3}{4},\ 0\right)$　準線は　直線 $x=\dfrac{3}{4}$

概形は　図 (2)(ア)

（イ）$y=2x^2$ から　$x^2=\dfrac{1}{2}y=4\cdot\dfrac{1}{8}y$　よって，焦点は　点 $\left(0,\ \dfrac{1}{8}\right)$

準線は　直線 $y=-\dfrac{1}{8}$　概形は　図 (2)(イ)



(3) 中心 P から直線 ℓ に垂線 PH を下ろすと　PH＝PF

よって，点 P の軌跡は，点 F を焦点，直線 ℓ を準線とする放物線である。

その方程式は　$y^2=4\cdot4x$　すなわち　$y^2=16x$

したがって，求める軌跡は　放物線 $y^2=16x$

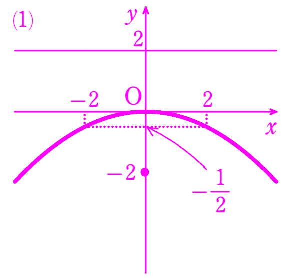
2 (1) 放物線 $x^2=-8y$ の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

(2) 点 $(3,\ 0)$ を通り，直線 $x=-3$ に接する円の中心の軌跡を求めよ。

(3) 頂点が原点で，焦点が x 軸上にあり，点 $(9,\ -6)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

解答 (1) 焦点は 点 $(0,\ -2)$，準線は 直線 $y=2$，[図]

(2) 放物線 $y^2=12x$　(3) $y^2=4x$



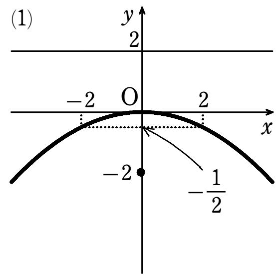
解説

(1) $x^2=4\cdot(-2)y$

よって，焦点は　点 $(0,\ -2)$

準線は　直線 $y=2$

概形は　図 (1)



(2) $\mathrm{F}(3,\ 0)$ とする。円の中心を P とし，P から直線 $x=-3$ に垂線 PH を下ろすと

PH＝PF

よって，点 P の軌跡は，点 F を焦点，直線 $x=-3$ を準線とする放物線であるから，その方程式は

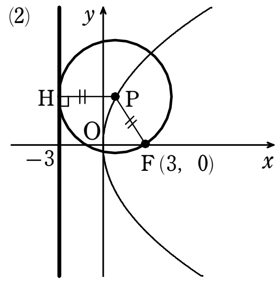
$y^2=4\cdot3x$　すなわち　$y^2=12x$

ゆえに，求める軌跡は　放物線 $y^2=12x$

(3) 求める放物線の方程式は，$y^2=ax$ とおける。

点 $(9,\ -6)$ を通るから　$(-6)^2=a\cdot9$

よって　$a=4$　したがって　$y^2=4x$



3 円 $(x-4)^2+y^2=1$ と直線 $x=-3$ の両方に接する円の中心 P の軌跡を求めよ。

解答 放物線 $y^2=16x$ および $y^2=12(x-1)$

解説

円 $(x-4)^2+y^2=1$ の半径は 1 であり，中心を $\mathrm{A}(4,\ 0)$ とする。

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，点 P から直線 $x=-3$ に下ろした垂線を PH とする。

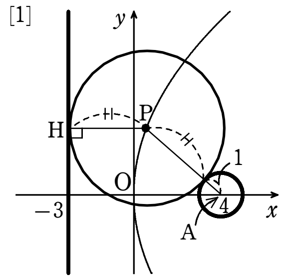
[1] 2 円が外接する場合　PA＝PH＋1

よって　$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\{x-(-3)\}+1$

ゆえに　$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=x+4$

よって　$(x-4)^2+y^2=(x+4)^2$

ゆえに　$y^2=16x$



[2] 2 円が内接する場合，PH＞1 であるから

PA＝PH－1

よって　$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\{x-(-3)\}-1$

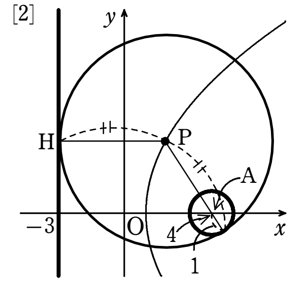
ゆえに　$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=x+2$

よって　$(x-4)^2+y^2=(x+2)^2$

ゆえに　$y^2=12(x-1)$

[1]，[2] から，求める軌跡は

放物線 $y^2=16x$ および $y^2=12(x-1)$



4 半円 $x^2+y^2=36$，$x\geqq0$ および y 軸の $-6\leqq y\leqq6$ の部分の，両方に接する円の中心 P の軌跡を求めよ。

解答 放物線 $y^2=-12(x-3)$ の $0<x\leqq3$ の部分

解説

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，題意を満たす円は半円に内接し，y 軸の $-6\leqq y\leqq6$ の部分に接する。

$0\leqq x\leqq6$ であるから　OP＝$6-x$

ゆえに　$\sqrt{x^2+y^2}=6-x$

よって　$x^2+y^2=(6-x)^2$

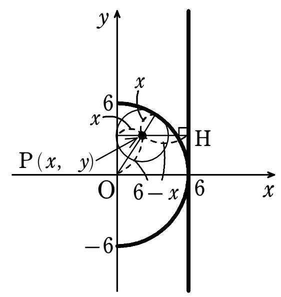
ゆえに　$y^2=-12(x-3)$

$x>0$ かつ $y^2=-12(x-3)\geqq0$ であるから

$0<x\leqq3$

したがって，求める軌跡は

放物線 $y^2=-12(x-3)$ の $0<x\leqq3$ の部分



5 a，b を実数とし，$b<a$ とする。焦点が点 $(0,\ a)$，準線が直線 $y=b$ である放物線を P で表すことにする。すなわち，P は点 $(0,\ a)$ からの距離と直線 $y=b$ からの距離が等しい点の軌跡である。

(1) 放物線 P の方程式を求めよ。

(2) 焦点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 $a-b$ の円を C とする。このとき，円 C と放物線 P の交点の座標を求めよ。

解答 (1) $y=\dfrac{1}{2(a-b)}x^2+\dfrac{a+b}{2}$　(2) $(a-b,\ a)$，$(b-a,\ a)$

解説

(1) 放物線 P 上の点 $(x,\ y)$ は，焦点 $(0,\ a)$ からの距離と直線 $y=b$ からの距離が等しい。

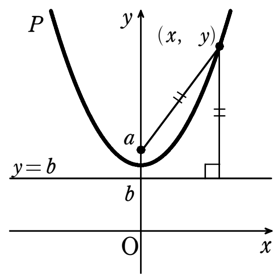
$a>b$ であるから　$y-b=\sqrt{x^2+(y-a)^2}$　…… ①

よって　$(y-b)^2=x^2+(y-a)^2$

整理すると　$2(a-b)y=x^2+a^2-b^2$

$a-b>0$ であるから，放物線 P の方程式は

$$y=\frac{1}{2(a-b)}x^2+\frac{a+b}{2}$$



(2) 円 C の方程式は　$x^2+(y-a)^2=(a-b)^2$　…… ②

これを ① に代入すると，$a-b>0$ から　$y-b=a-b$　よって　$y=a$

このとき，② から　$x^2=(a-b)^2$　ゆえに　$x=\pm(a-b)$

よって，求める交点の座標は　$(a-b,\ a)$，$(b-a,\ a)$

$\boxed{6}$ 放物線 $y^2=6x$ 上の点 P と，定点 A$(a,\ 0)$ の距離の最小値を求めよ。ただし，a は実数の定数とする。

解答　$a \leqq 3$ のとき最小値 $|a|$，$a>3$ のとき最小値 $\sqrt{6a-9}$

解説

P$(s,\ t)$ とすると　$\mathrm{PA}^2=(s-a)^2+t^2$

点 P は放物線 $y^2=6x$ 上にあるから　$t^2=6s$

ゆえに　$\mathrm{PA}^2=(s-a)^2+6s=s^2-2(a-3)s+a^2=\{s-(a-3)\}^2-(a-3)^2+a^2$

$=\{s-(a-3)\}^2+6a-9$

$s=\dfrac{t^2}{6} \geqq 0$ であるから　$s \geqq 0$

[1]　$a-3 \leqq 0$ すなわち $a \leqq 3$ のとき

PA^2 は $s=0$ のとき最小となり，最小値は　a^2

[2]　$0<a-3$ すなわち $a>3$ のとき

PA^2 は $s=a-3$ のとき最小となり，最小値は　$6a-9$

$\mathrm{PA}>0$ であるから，PA^2 が最小となるとき PA も最小となる。

よって，[1]，[2] から　$a \leqq 3$ のとき最小値 $\sqrt{a^2}=|a|$

$a>3$ のとき最小値 $\sqrt{6a-9}$