統一テスト（複素数平面･２次曲線･媒介変数表示･極座標）Ｈ２７．１１．２１

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 実軸，原点，虚軸のそれぞれに関して，$5+3i$ を表す点と対称な点の表す複素数を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の複素数の絶対値を求めよ。　$4+3i$

$\boxed{3}$ 次の 2 点 A(α)，B(β) と原点 O が一直線上にあるとき，実数 x の値を求めよ。
$\alpha=x+i$，$\beta=8-2i$

$\boxed{4}$ 複素数 α，β について，次のものを求めよ。　$\alpha-\beta+5i=0$ のとき，$\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

$\boxed{5}$ 複素数 α，β について，$\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$ は純虚数であることを証明せよ。ただし，$\alpha\overline{\beta}$ は実数でないとする。

$\boxed{6}$ 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。
(1)　$\sqrt{3}-i$　　(2)　$5i$

$\boxed{7}$ 次の 2 つの複素数 α，β について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。　$\alpha=-2-2\sqrt{3}\,i$，$\beta=-1+i$

$\boxed{8}$ $\alpha=3+4i$，$\beta=1+5i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

$\boxed{9}$ $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$ を計算せよ。

$\boxed{10}$ A$(3-4i)$，B$(-2+3i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。
(1)　線分 AB を 2 : 3 に内分する点 C　　(2)　線分 AB の中点 M
(3)　線分 AB を 5 : 4 に外分する点 D

$\boxed{11}$ 3 点 A$(4-2i)$，B$(5+4i)$，C$(3-5i)$ を頂点とする △ABC の重心を表す複素数を求めよ。

$\boxed{12}$ 次の方程式を満たす点 z 全体は，どのような図形か。$|z-3i|=2$

$\boxed{13}$ 次の方程式を満たす点 z 全体は，どのような図形か。　$|z-3|=|z-6i|$

$\boxed{14}$ 方程式 $|z-1|=2|z-i|$ を満たす点 z 全体は，どのような図形か。

$\boxed{15}$ 次のような放物線の方程式を求めよ。　焦点 $(-5,\ 0)$，準線 $x=5$

$\boxed{16}$ 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 10 となる楕円の方程式を求めよ。

$\boxed{17}$ 次の方程式は放物線，楕円，双曲線のいずれを表すか。また，その焦点の座標を求めよ。
$4x^2+9y^2-16x+54y+61=0$

$\boxed{18}$ 双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=-1$ の焦点，頂点，漸近線を求めよ，また，その双曲線の概形をかけ。

$\boxed{19}$ 双曲線 $9x^2-4y^2=36$ と直線 $y=mx+1$ が異なる 2 点で交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

$\boxed{20}$ 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。　$\begin{cases} x=\dfrac{4}{\cos\theta} \\ y=6\tan\theta \end{cases}$

$\boxed{21}$ 極座標が次のような点の直交座標を求めよ。　$(5,\ \pi)$

$\boxed{22}$ 直交座標が次のような点の極座標を求めよ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。　$(3,\ -\sqrt{3})$

$\boxed{23}$ 極座標に関して，中心 A の極座標が $(3,\ 0)$ で，半径 3 の円の極方程式を求めよ。

$\boxed{24}$ 次の直交座標に関する方程式を，極方程式で表せ。　$y^2-x^2=1$

$\boxed{25}$ 次の極方程式の表す曲線を，直交座標 x，y の方程式で表せ。　$r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$

1 実軸，原点，虚軸のそれぞれに関して，$5+3i$ を表す点と対称な点の表す複素数を求めよ。

解答　実軸，原点，虚軸の順に　$5-3i,\ -5-3i,\ -5+3i$　3

解説

実軸に関して対称な点を表す複素数は　$5-3i$

原点に関して対称な点を表す複素数は　$-5-3i$

虚軸に関して対称な点を表す複素数は　$-5+3i$

参考　複素数 z と実軸，原点，虚軸に関して対称な点を表す複素数は，それぞれ

$\bar{z},\ -z,\ -\bar{z}$

2 次の複素数の絶対値を求めよ。　$4+3i$

解答　5　3

解説

$|4+3i|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

3 次の2点 A(α)，B(β) と原点 O が一直線上にあるとき，実数 x の値を求めよ。

$\alpha=x+i,\ \beta=8-2i$

解答　$x=-4$　3

解説

$\beta=k\alpha$ となる実数 k がある。

$8-2i=k(x+i)$ から　$8-2i=kx+ki$

よって　$8=kx,\ -2=k$

$k=-2$ であるから　$x=\dfrac{8}{k}=\dfrac{8}{-2}=-4$

4 複素数 α，β について，次のものを求めよ。　$\alpha-\beta+5i=0$ のとき，$\bar{\alpha}-\bar{\beta}$

解答　$5i$　3

解説

$\alpha-\beta+5i=0$ から　$\alpha-\beta=-5i$

両辺の共役複素数を考えると　$\overline{\alpha-\beta}=\overline{-5i}$　すなわち　$\bar{\alpha}-\bar{\beta}=5i$

5 複素数 α，β について，$\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta$ は純虚数であることを証明せよ。ただし，$\alpha\bar{\beta}$ は実数でないとする。

解答　略

解説

$\alpha\bar{\beta}$ は実数でないから　$\overline{\alpha\bar{\beta}}\neq\alpha\bar{\beta}$　すなわち　$\bar{\alpha}\beta\neq\alpha\bar{\beta}$

よって　$\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta\neq0$

また　$\overline{\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta}=\overline{\alpha\bar{\beta}}-\overline{\bar{\alpha}\beta}=\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}=-(\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta)$　//

したがって，$\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta$ は純虚数である。　4

6 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　$\sqrt{3}-i$　　(2)　$5i$

解答　(1)　$2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$　3　(2)　$5\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$　3

解説

(1)　$\sqrt{3}-i$ の絶対値を r とすると

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2,\ \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{11}{6}\pi$

よって　$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$

(2)　$5i$ の絶対値を r とすると

$r=\sqrt{0^2+5^2}=5,\ \cos\theta=\dfrac{0}{5}=0,\ \sin\theta=\dfrac{5}{5}=1$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

よって　$5i=5\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

7 次の2つの複素数 α，β について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。　$\alpha=-2-2\sqrt{3}i,\ \beta=-1+i$

解答　$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の順に　$4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$，$2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$　3　3

解説

$\alpha=4\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=4\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$

$\beta=\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

よって　$\alpha\beta=4\sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{3}{4}\pi\right)\right\}$

$=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{25}{12}\pi+i\sin\dfrac{25}{12}\pi\right)=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{3}{4}\pi\right)\right\}$

$=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$

8 $\alpha=3+4i$，$\beta=1+5i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

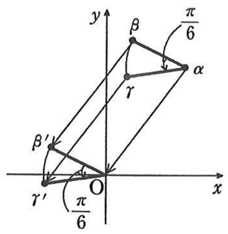
解答　$\dfrac{5-2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{6+\sqrt{3}}{2}i$　4

解説

点 α が原点 O に移るような平行移動で，点 β，γ がそれぞれ β'，γ' に移るとすると

$\beta'=\beta-\alpha=(1+5i)-(3+4i)=-2+i$

$\gamma'=\gamma-\alpha$



点 γ' は，点 β' を原点を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点であるから

$\gamma'=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)(-2+i)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(-2+i)$

$=-\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}i$

よって　$\gamma=\gamma'+\alpha=-\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}i+(3+4i)$

$=\dfrac{5-2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{6+\sqrt{3}}{2}i$

9 $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$ を計算せよ。

解答　$-16+16\sqrt{3}i$　4

解説

$\dfrac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

よって　$\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}\right)^{10}=(\sqrt{2})^{10}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}^{10}$

$=32\left\{\cos\left(-\dfrac{10}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{10}{3}\pi\right)\right\}=32\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$=32\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-16+16\sqrt{3}i$

10 A$(3-4i)$，B$(-2+3i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1)　線分 AB を 2：3 に内分する点 C　　(2)　線分 AB の中点 M

(3)　線分 AB を 5：4 に外分する点 D

解答　(1)　$\dfrac{5-6i}{5}$　3　(2)　$\dfrac{1-i}{2}$　3　(3)　$-22+31i$　3

解説

(1)　$\dfrac{3(3-4i)+2(-2+3i)}{2+3}=\dfrac{5-6i}{5}$　　(2)　$\dfrac{(3-4i)+(-2+3i)}{2}=\dfrac{1-i}{2}$

(3)　$\dfrac{-4(3-4i)+5(-2+3i)}{5-4}=-22+31i$

11 3点 A$(4-2i)$，B$(5+4i)$，C$(3-5i)$ を頂点とする △ABC の重心を表す複素数を求めよ。

解答　$4-i$　4

解説

$\dfrac{(4-2i)+(5+4i)+(3-5i)}{3}=4-i$

12 次の方程式を満たす点 z 全体は，どのような図形か。$|z-3i|=2$

解答　点 $3i$ を中心とする半径 2 の円　3

解説

点 $3i$ を中心とする半径 2 の円

13 次の方程式を満たす点 z 全体は，どのような図形か。　$|z-3|=|z-6i|$

解答　2点 A(3)，B$(6i)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線　3

解説

2点 A(3)，B$(6i)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線

14 方程式 $|z-1|=2|z-i|$ を満たす点 z 全体は，どのような図形か。

解答　点 $\dfrac{4i-1}{3}$ を中心とする半径 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ の円　4

解説

方程式の両辺を2乗すると　$|z-1|^2=4|z-i|^2$

よって　$(z-1)\overline{(z-1)}=4(z-i)\overline{(z-i)}$

$(z-1)(\bar{z}-1)=4(z-i)(\bar{z}+i)$

/59

両辺を展開して整理すると　$z\bar{z}+\frac{4i+1}{3}z-\frac{4i-1}{3}\bar{z}=-1$

式を変形すると　$\left(z-\frac{4i-1}{3}\right)\left(\bar{z}+\frac{4i+1}{3}\right)=\frac{8}{9}$

すなわち　$\left(z-\frac{4i-1}{3}\right)\left(\overline{z-\frac{4i-1}{3}}\right)=\frac{8}{9}$　　ゆえに　$\left|z-\frac{4i-1}{3}\right|^2=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2$

したがって　$\left|z-\frac{4i-1}{3}\right|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

これは，点 $\frac{4i-1}{3}$ を中心とする半径 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ の円である。

参考　この円は，2 点 1，i からの距離の比が 2：1 である点 z 全体である（アポロニウスの円）。

15 次のような放物線の方程式を求めよ。　焦点 $(-5,\ 0)$，準線 $x=5$

解答　$y^2=-20x$　3

解説

$y^2=4px$ に $p=-5$ を代入して　$y^2=4\cdot(-5)\cdot x$　　よって　$y^2=-20x$

16 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 10 となる楕円の方程式を求めよ。

解答　$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　4

解説

求める楕円の方程式は $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ とおける。

焦点からの距離の和について，$2a=10$ であるから　$a=5$，$a^2=25$

焦点の座標について，$\sqrt{a^2-b^2}=4$ であるから　$b^2=a^2-4^2=25-16=9$

したがって，求める楕円の方程式は　$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

17 次の方程式は放物線，楕円，双曲線のいずれを表すか。また，その焦点の座標を求めよ。
$4x^2+9y^2-16x+54y+61=0$

解答　楕円，焦点の座標は　$(2+\sqrt{5},\ -3)$，$(2-\sqrt{5},\ -3)$　3

1

解説

この方程式を変形すると　$4(x^2-4x+4)+9(y^2+6y+9)=16+81-61$

すなわち　$4(x-2)^2+9(y+3)^2=36$

よって　$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$　……①

① は，楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動した楕円を表す。

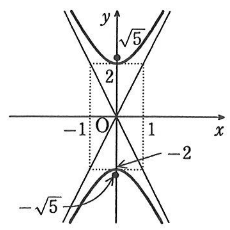
楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ の焦点の座標は $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$ であるから，楕円 ① の焦点の座標は　$(2+\sqrt{5},\ -3)$，$(2-\sqrt{5},\ -3)$

18 双曲線 $x^2-\frac{y^2}{4}=-1$ の焦点，頂点，漸近線を求めよ，また，その双曲線の概形をかけ。

1　1

解答　焦点は2 点 $(0,\ \sqrt{5})$，$(0,\ -\sqrt{5})$；頂点は2 点 $(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$；
漸近線は2 直線 $y=2x$，$y=-2x$；[図]

1　1 //



解説

$\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{2^2}=-1$

$\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ から，焦点は

2 点 $(0,\ \sqrt{5})$，$(0,\ -\sqrt{5})$

頂点は　2 点 $(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$

漸近線は　2 直線 $y=2x$，$y=-2x$

概形は [図]

19 双曲線 $9x^2-4y^2=36$ と直線 $y=mx+1$ が異なる 2 点で交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答　$-\frac{\sqrt{10}}{2}<m<-\frac{3}{2}$，$-\frac{3}{2}<m<\frac{3}{2}$，$\frac{3}{2}<m<\frac{\sqrt{10}}{2}$　4

解説

$y=mx+1$ を $9x^2-4y^2=36$ に代入して整理すると

$(4m^2-9)x^2+8mx+40=0$　……①

双曲線と直線が異なる 2 点で交わるのは，① が 2 次方程式であり，その判別式 D について $D>0$ が成り立つときである。

よって，$4m^2-9\neq0$ から　$m\neq\pm\frac{3}{2}$　……②

また　$\frac{D}{4}=(4m)^2-(4m^2-9)\cdot40=-144m^2+360=-72(2m^2-5)>0$

であるから　$-\frac{\sqrt{10}}{2}<m<\frac{\sqrt{10}}{2}$　……③　2

② と ③ の共通範囲を求めて　$-\frac{\sqrt{10}}{2}<m<-\frac{3}{2}$，$-\frac{3}{2}<m<\frac{3}{2}$，$\frac{3}{2}<m<\frac{\sqrt{10}}{2}$

20 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。　$\begin{cases} x=\frac{4}{\cos\theta} \\ y=6\tan\theta \end{cases}$

解答　双曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}=1$　4

解説

$x=\frac{4}{\cos\theta}$，$y=6\tan\theta$ から　$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{x}{4}$，$\tan\theta=\frac{y}{6}$

これを $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると　$1+\left(\frac{y}{6}\right)^2=\left(\frac{x}{4}\right)^2$

よって　双曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}=1$

21 極座標が次のような点の直交座標を求めよ。　$(5,\ \pi)$

解答　$(-5,\ 0)$　3

解説

求める直交座標を $(x,\ y)$ とする。

$x=5\cos\pi=5\cdot(-1)=-5$，$y=5\sin\pi=5\cdot0=0$

よって　$(-5,\ 0)$

22 直交座標が次のような点の極座標を求めよ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。　$(3,\ -\sqrt{3})$

解答　$\left(2\sqrt{3},\ \frac{11}{6}\pi\right)$　3

解説

$x=-3$，$y=3$ であるから

$r=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}$，　$\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，　$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

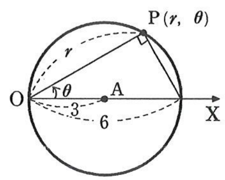
$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{3}{4}\pi$　　よって，極座標は　$\left(3\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)$

23 極座標に関して，中心 A の極座標が $(3,\ 0)$ で，半径 3 の円の極方程式を求めよ。

解答　$r=6\cos\theta$　4

解説

曲線上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とする。　$r=6\cos\theta$



24 次の直交座標に関する方程式を，極方程式で表せ。　$y^2-x^2=1$

解答　$r^2\cos2\theta=-1$　4

解説

曲線上の点 P$(x,\ y)$ の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$x^2+y^2=r^2$

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を $y^2-x^2=1$ に代入すると　$r^2\sin^2\theta-r^2\cos^2\theta=1$

すなわち　$-r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=1$　　よって　$r^2\cos2\theta=-1$

25 次の極方程式の表す曲線を，直交座標 x，y の方程式で表せ。　$r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$

解答　$\sqrt{3}x+y=2$　4

解説

曲線上の点 P$(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると

$r\cos\theta=x$，$r\sin\theta=y$，$r^2=x^2+y^2$

加法定理を用いて変形すると　$r\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=1$

よって　$\frac{1}{2}r\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}r\cos\theta=1$

$r\sin\theta=y$，$r\cos\theta=x$ を代入して　$\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}x=1$

したがって　$\sqrt{3}x+y=2$

/41