数学演習（式と曲線）Ｈ２８．９．９　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 焦点が点 $(0,\ -1)$ で，準線が直線 $y=1$ である放物線の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{5}=1$ の焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

$\boxed{3}$ 漸近線の方程式が $y=2x,\ y=-2x$ で，点 $(3,\ 2\sqrt{5})$ を通る双曲線の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ 方程式 $4x^2-9y^2+16x+18y+43=0$ はどのような図形を表すか。

$\boxed{5}$ 極座標で与えられた 2 点 $\mathrm{P}\left(2,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$，$\mathrm{Q}\left(3,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$ 間の距離を求めよ。また，極を O とするとき，△OPQ の面積を求めよ。

$\boxed{6}$ 点 $\mathrm{F}(2,\ 0)$ を通り，直線 $x=-2$ に接する円の中心を P とする。P の軌跡を求めよ。

$\boxed{7}$ 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{4t}{1+t^2}$$

$\boxed{8}$ 点 $(3,\ 4)$ から楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ に引いた 2 本の接線は直交することを示せ。

$\boxed{9}$ 双曲線 $x^2-3y^2=3$ と直線 $y=x+k$ が異なる 2 点で交わるとする。

(1) 定数 k のとる値の範囲を求めよ。

(2) 双曲線が直線から切り取る線分の中点の軌跡を求めよ。

数学演習（式と曲線）Ｈ２８．９．９　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 焦点が点 $(0,\ -1)$ で，準線が直線 $y=1$ である放物線の方程式を求めよ。

解答　$x^2=-4y$

解説

$x^2=4py$ に $p=-1$ を代入して　　$x^2=4\cdot(-1)\cdot y$

よって　　$x^2=-4y$

$\boxed{2}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{5}=1$ の焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

解答　焦点は 2 点 $(0,\ \sqrt{2})$，$(0,\ -\sqrt{2})$；長軸の長さは $2\sqrt{5}$；短軸の長さは $2\sqrt{3}$

解説

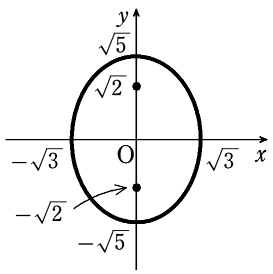
楕円の方程式は　　$\dfrac{x^2}{(\sqrt{3})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$

焦点は y 軸上にあり，$\sqrt{5-3}=\sqrt{2}$ から，

焦点は　2 点 $(0,\ \sqrt{2})$，$(0,\ -\sqrt{2})$

また　長軸の長さは　$2\sqrt{5}$

短軸の長さは　$2\sqrt{3}$



$\boxed{3}$ 漸近線の方程式が $y=2x,\ y=-2x$ で，点 $(3,\ 2\sqrt{5})$ を通る双曲線の方程式を求めよ。

解答　$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$

解説

求める双曲線の方程式は　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$

とおける。

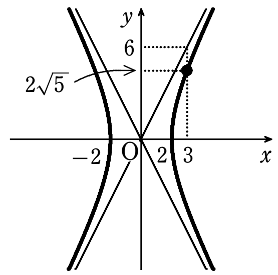
漸近線の方程式が $y=2x,\ y=-2x$ であるから

$\dfrac{b}{a}=2$　　ゆえに　　$b=2a$

また，点 $(3,\ 2\sqrt{5})$ を通るから　　$\dfrac{9}{a^2}-\dfrac{20}{(2a)^2}=1$

よって　　$a^2=4$　　ゆえに　　$b^2=4a^2=16$

したがって，求める双曲線の方程式は　　$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$



$\boxed{4}$ 方程式 $4x^2-9y^2+16x+18y+43=0$ はどのような図形を表すか。

解答　双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した双曲線

解説

この方程式を変形すると　　$4(x^2+4x+4)-9(y^2-2y+1)=16-9-43$

すなわち　　$4(x+2)^2-9(y-1)^2=-36$

したがって　　$\dfrac{(x+2)^2}{9}-\dfrac{(y-1)^2}{4}=-1$

よって，この方程式は，双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した双曲線を表す。

$\boxed{5}$ 極座標で与えられた 2 点 $\mathrm{P}\left(2,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$，$\mathrm{Q}\left(3,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$ 間の距離を求めよ。また，極を O とするとき，△OPQ の面積を求めよ。

解答　距離は $\sqrt{7}$，面積は $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

解説

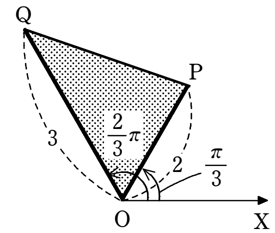
$\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$

余弦定理により　　$\mathrm{PQ}^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos\dfrac{\pi}{3}=7$

ゆえに　　$\mathrm{PQ}=\sqrt{7}$

また，△OPQ の面積は　　$\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

よって，距離は $\sqrt{7}$，面積は $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$



$\boxed{6}$ 点 $\mathrm{F}(2,\ 0)$ を通り，直線 $x=-2$ に接する円の中心を P とする。P の軌跡を求めよ。

解答　放物線 $y^2=8x$

解説

P の座標を $(x,\ y)$ とし，円と直線 $x=-2$ との接点を H とすると　　PF＝PH

すなわち　　$\mathrm{PF}^2=\mathrm{PH}^2$

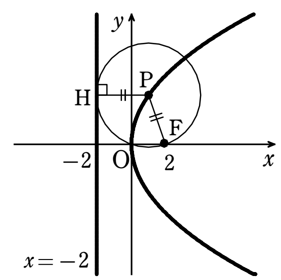
よって　　$(x-2)^2+y^2=(x+2)^2$

整理して　　$y^2=8x$

よって，点 P は放物線 $y^2=8x$ 上にある。

逆に，この放物線上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　放物線 $y^2=8x$



別解　円の中心 P は，定点 F と定直線 ℓ：$x=-2$ から等距離にある。

よって，P の軌跡は，F を焦点，ℓ を準線とする放物線で，その方程式は

$y^2=4\cdot2\cdot x$　　すなわち　　$y^2=8x$

したがって，求める軌跡は　　放物線 $y^2=8x$

$\boxed{7}$ 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{4t}{1+t^2}$$

解答　楕円 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$　　ただし，点 $(-1,\ 0)$ を除く。

解説

与えられた式から　$(1+x)t^2=1-x$　…… ①，　$yt^2-4t=-y$　…… ②

$x=-1$ は ① を満たさないから　$x\neq-1$

①，② を t，t^2 の連立方程式とみて解くと　$t=\frac{y}{2(1+x)}$，$t^2=\frac{1-x}{1+x}$

t を消去すると　$\left\{\frac{y}{2(1+x)}\right\}^2=\frac{1-x}{1+x}$　　整理すると　$4x^2+y^2=4$

よって，求める曲線は　楕円 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$　ただし，点 $(-1,\ 0)$ を除く。

$\boxed{8}$ 点 $(3,\ 4)$ から楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ に引いた 2 本の接線は直交することを示せ。

解答　略

解説

点 $(3,\ 4)$ を通る接線は x 軸に垂直でないから，その方程式は $y=m(x-3)+4$ …… ①
とおける。

① を $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ に代入して整理すると

$$(16m^2+9)x^2-32m(3m-4)x+16(9m^2-24m+7)=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=16^2m^2(3m-4)^2-(16m^2+9)\cdot16(9m^2-24m+7)$$
$$=144(7m^2+24m-7)$$

直線 ① が楕円に接するのは $D=0$ のときであるから　$7m^2+24m-7=0$

この方程式の 2 つの実数解 m_1，m_2 が，2 本の接線の傾きを表す。

解と係数の関係から　$m_1m_2=\frac{-7}{7}$　つまり　$m_1m_2=-1$

よって，2 本の接線は直交する。

$\boxed{9}$ 双曲線 $x^2-3y^2=3$ と直線 $y=x+k$ が異なる 2 点で交わるとする。

(1)　定数 k のとる値の範囲を求めよ。

(2)　双曲線が直線から切り取る線分の中点の軌跡を求めよ。

解答　(1)　$k<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<k$　　(2)　直線 $y=\frac{1}{3}x$ の $x<-\frac{3}{\sqrt{2}}$，$\frac{3}{\sqrt{2}}<x$ の部分

解説

(1)　2 つの方程式から，y を消去すると　$2x^2+6kx+3k^2+3=0$　…… ①

2 次方程式 ① の判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=(3k)^2-2(3k^2+3)=3(k^2-2)$

異なる 2 点で交わるから　$D>0$

ゆえに　$k^2-2>0$　　よって　$k<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<k$

(2)　① の異なる 2 つの実数解を x_1，x_2 とし，線分の中点の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{6k}{2}\right)=-\frac{3}{2}k,\quad y=x+k=-\frac{3}{2}k+k=-\frac{1}{2}k$$

k を消去して　$x=3y$　　(1) から　$x<-\frac{3}{\sqrt{2}}$，$\frac{3}{\sqrt{2}}<x$

よって，求める軌跡は　直線 $y=\frac{1}{3}x$ の $x<-\frac{3}{\sqrt{2}}$，$\frac{3}{\sqrt{2}}<x$ の部分