統一テスト（式と曲線）Ｈ３０．７．７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の放物線の概形をかけ。また，その焦点と準線を求めよ。　$y^2=-12x$

$\boxed{2}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ の概形をかけ。また，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

$\boxed{3}$ 双曲線$\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$の概形をかけ。また，その焦点，頂点，漸近線を求めよ。

$\boxed{4}$ 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 10である楕円の方程式を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の方程式はどのような図形を表すか。　$4y^2-9x^2-18x-24y-9=0$

$\boxed{6}$ 放物線 $y=-x^2+2tx+(t-1)^2$ の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか。

$\boxed{7}$ 角 θ を媒介変数として，次の曲線を表せ。

(1)　楕円 $9x^2+4y^2=36$　　　(2)　双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

$\boxed{8}$ 極座標が次のような点の直交座標を求めよ。$\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\boxed{9}$ 直交座標が次のような点の極座標を求めよ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

$\boxed{10}$ 極座標に関して，次の円や直線の極方程式を求めよ。

(1)　極 O を中心とする半径 3 の円

(2)　点 $(2,\ 0)$ を通り，始線に垂直な直線

(3)　極 O を通り，始線 OX となす角が $\dfrac{2}{3}\pi$ の直線

(4)　中心 A の極座標が $(3,\ 0)$ である半径 3 の円

$\boxed{11}$ 次の双曲線を極方程式で表せ。　$x^2-y^2=1$

$\boxed{12}$ 次の極方程式の表す曲線を，直交座標の x，y の方程式で表せ。$r=\cos\theta+\sin\theta$

$\boxed{13}$ 座標平面上において，線分 AB の端点 A は x 軸上を，端点 B は y 軸上を動く。線分 AB の長さが 9 で，点 P は線分 AB を $1:2$ に内分するとき，点 P の軌跡を求めよ。

$\boxed{14}$ 点C$(0\,,3)$ から楕円 $x^2+2y^2=2$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

$\boxed{15}$ 双曲線 $x^2-y^2=1$ と直線 $y=mx+2$ の共有点の個数を調べよ。ただし，m は定数とする。

$\boxed{16}$ 曲線 $13x^2-6\sqrt{3}\,xy+7y^2=16$ を，原点を中心として $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転移動するとき，移動後の曲線の方程式を求めよ。

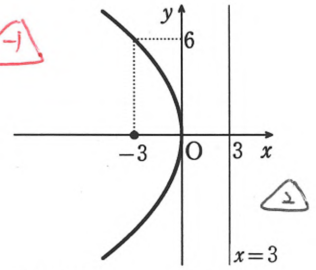
$\boxed{17}$ 楕円 $2x^2+y^2=4$ と直線 $y=x+k$ が異なる 2 つの共有点 P，Q をもつとき，線分 PQ の中点 R の軌跡を求めよ。

1 次の放物線の概形をかけ。また，その焦点と準線を求めよ。　$y^2=-12x$

解答　焦点，準線の順に

点 $(-3,\ 0)$，直線 $x=3$

不備 -1



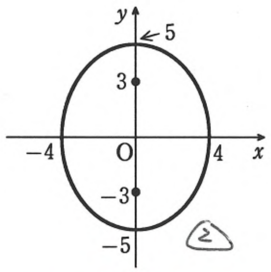
$y^2=4\cdot(-3)x$ より焦点は点 $(-3,\ 0)$，準線は直線 $x=3$ である。

概形は[図]のようになる。

2 楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ の概形をかけ。また，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

解答　焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さの順に

$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$；10；8；[図]



点を書く。

与えられた方程式を変形すると　$\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$

焦点の座標は，$\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$ より　$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$

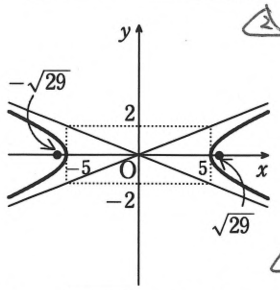
長軸の長さは　$2\cdot5=10$，短軸の長さは　$2\cdot4=8$

概形は[図]のようになる。

3 双曲線 $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ の概形をかけ。また，その焦点，頂点，漸近線を求めよ。

解答　焦点，頂点，漸近線の順に

2点 $(\sqrt{29},\ 0)$，$(-\sqrt{29},\ 0)$；2点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$；2直線 $y=\dfrac{2}{5}x$，$y=-\dfrac{2}{5}x$



焦点は，$\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$ より　2点 $(\sqrt{29},\ 0)$，$(-\sqrt{29},\ 0)$

頂点は　2点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$

漸近線は　2直線 $y=\dfrac{2}{5}x$，$y=-\dfrac{2}{5}x$

概形は[図]のようになる。

4 2点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が10である楕円の方程式を求めよ。

解答　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

焦点が x 軸上にあるから，求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>b>0)$ とおける。

焦点からの距離の和について，$2a=10$ であるから　$a=5$

焦点の座標について，$\sqrt{a^2-b^2}=4$ であるから　$b^2=a^2-4^2=25-16=9$

したがって，求める楕円の方程式は　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

5 次の方程式はどのような図形を表すか。　$4y^2-9x^2-18x-24y-9=0$

解答　双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=-1$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に3だけ平行移動した双曲線

与えられた方程式より　$9x^2-4y^2+18x+24y+9=0$

この方程式を変形すると　$9(x^2+2x+1)-9-4(y^2-6y+9)+36+9=0$

すなわち　$9(x+1)^2-4(y-3)^2=-36$

$\dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=-1$

よって，この方程式は，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=-1$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に3だけ平行移動した双曲線を表す。

曲線名がない -1

6 放物線 $y=-x^2+2tx+(t-1)^2$ の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか。

曲線名がない -1

解答　放物線 $y=2x^2-2x+1$

$-x^2+2tx+(t-1)^2=-(x-t)^2+2t^2-2t+1$

よって　$y=-(x-t)^2+2t^2-2t+1$

その頂点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると　$x=t$，$y=2t^2-2t+1$

t を消去して　$y=2x^2-2x+1$

よって，頂点Pが描く曲線は，放物線 $y=2x^2-2x+1$ である。

7 角 θ を媒介変数として，次の曲線を表せ。

(1) 楕円 $9x^2+4y^2=36$　　(2) 双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

解答　(1) $x=2\cos\theta$，$y=3\sin\theta$　　(2) $x=\dfrac{2}{\cos\theta}$，$y=\tan\theta$

(1) 与えられた方程式を変形すると　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

よって，$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ から　$x=2\cos\theta$，$y=3\sin\theta$

(2) $\dfrac{x^2}{2^2}-y^2=1$ から　$x=\dfrac{2}{\cos\theta}$，$y=\tan\theta$

8 極座標が次のような点の直交座標を求めよ。$\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$

解答　$(2,\ 2\sqrt{3})$

求める直交座標を $(x,\ y)$ とする。

$x=4\cos\dfrac{\pi}{3}=4\cdot\dfrac{1}{2}=2$，$y=4\sin\dfrac{\pi}{3}=4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

よって，直交座標は　$(2,\ 2\sqrt{3})$

9 直交座標が次のような点の極座標を求めよ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

解答　$\left(2,\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$

$r=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

よって，極座標は　$\left(2,\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$

10 極座標に関して，次の円や直線の極方程式を求めよ。

(1) 極Oを中心とする半径3の円

(2) 点 $(2,\ 0)$ を通り，始線に垂直な直線

(3) 極Oを通り，始線OXとなす角が $\dfrac{2}{3}\pi$ の直線

(4) 中心Aの極座標が $(3,\ 0)$ である半径3の円

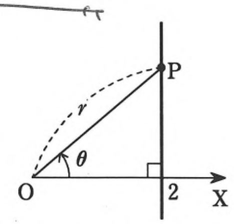
解答　(1) $r=3$　(2) $r=\dfrac{2}{\cos\theta}$　(3) $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$　(4) $r=6\cos\theta$

(1) $r=3$

(2) 直線上の点Pの極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，

$\mathrm{OP}\cos\theta=2$ より　$r\cos\theta=2$

よって，求める極方程式は　$r=\dfrac{2}{\cos\theta}$



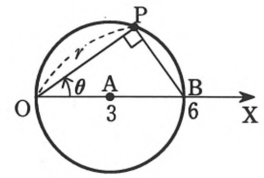
(3) $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

(4) 円上の点Pの極座標を $(r,\ \theta)$ とする。

極座標が $(6,\ 0)$ である点をBとすると，この円はOBを直径とする円である。

このとき，右の図から　$\mathrm{OP}=\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{BOP}$

よって，求める極方程式は　$r=6\cos\theta$



11 次の双曲線を極方程式で表せ。　$x^2-y^2=1$

解答　$r^2\cos2\theta=1$

直線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

これらを $x^2-y^2=1$ に代入すると　$r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=1$

よって　$r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=1$　ゆえに　$r^2\cos2\theta=1$

/68

12 次の極方程式の表す曲線を，直交座標の x，y の方程式で表せ。$r=\cos\theta+\sin\theta$

解答 $x^2+y^2-x-y=0$ 4

曲線上の点 P$(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると

$r\cos\theta=x,\ r\sin\theta=y,\ r^2=x^2+y^2$ ……①

極方程式 $r=\cos\theta+\sin\theta$ の両辺に r を掛けると

$r^2=r(\cos\theta+\sin\theta)$　すなわち　$r^2=r\cos\theta+r\sin\theta$

これに ① を代入して，r，θ を消去すると　$x^2+y^2=x+y$

よって　$x^2+y^2-x-y=0$

13 座標平面上において，線分 AB の端点 A は x 軸上を，端点 B は y 軸上を動く。線分 AB の長さが 9 で，点 P は線分 AB を 1：2 に内分するとき，点 P の軌跡を求めよ。

解答 楕円 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 6

点 A の座標を $(s,\ 0)$，点 B の座標を $(0,\ t)$ とすると，AB=9 から

$s^2+t^2=9^2$ ……①

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，P は線分 AB を 1：2 に内分するから

$x=\dfrac{2}{3}s,\ y=\dfrac{1}{3}t$　すなわち　$s=\dfrac{3}{2}x,\ t=3y$　2

これらを ① に代入すると

$\left(\dfrac{3}{2}x\right)^2+(3y)^2=9^2$　すなわち　$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$

よって，点 P は楕円 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上にある。

曲線でない

-1

逆に，この楕円上のすべての点 P$(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は，楕円 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ である。

14 点C$(0, 3)$ から楕円 $x^2+2y^2=2$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

2　1　2　1

解答 $2x+y=3,\ \left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$；$-2x+y=3,\ \left(-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ 6

接点を P$(x_1,\ y_1)$ とする。

点 P は楕円 $x^2+2y^2=2$ 上にあるから　$x_1{}^2+2y_1{}^2=2$ ……①

点 P における接線の方程式は　$x_1x+2y_1y=2$

この直線が点 $(0,\ 3)$ を通るから

$x_1\cdot0+2y_1\cdot3=2$　よって　$y_1=\dfrac{1}{3}$ ……②

$m=\pm2$

2

①に代入して　$x_1{}^2+2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=2$

これを解いて　$x_1=\pm\dfrac{4}{3}$

よって，接線の方程式と接点の座標は

接点$\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$のとき，$\dfrac{4}{3}x+2\cdot\dfrac{1}{3}y=2$　つまり　$2x+y=3$

接点$\left(-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$のとき，$-\dfrac{4}{3}x+2\cdot\dfrac{1}{3}y=2$　つまり　$-2x+y=3$

(どっちがどっちの接点か分からない解答多し)

15 双曲線 $x^2-y^2=1$ と直線 $y=mx+2$ の共有点の個数を調べよ。ただし，m は定数とする。

解答 $-\sqrt{5}<m<-1$，$-1<m<1$，$1<m<\sqrt{5}$ のとき 2 個；$m=\pm1$，$\pm\sqrt{5}$ のとき 1 個；$m<-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}<m$ のとき 0 個

5

$x^2-y^2=1$ ……①，$y=mx+2$ ……②

② を ① に代入すると　$x^2-(mx+2)^2=1$

整理すると　$(1-m^2)x^2-4mx-5=0$ ……③

[1] $1-m^2\neq0$ すなわち $m\neq\pm1$ のとき

x の方程式 ③ は 2 次方程式となるから，2 次方程式 ③ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-2m)^2-(1-m^2)\cdot(-5)=-(m^2-5)$

$D>0$ のとき　$-(m^2-5)>0$　すなわち　$-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$

$m\neq\pm1$ であるから　$-\sqrt{5}<m<-1,\ -1<m<1,\ 1<m<\sqrt{5}$

$D=0$ のとき　$-(m^2-5)=0$　すなわち　$m=\pm\sqrt{5}$

$D<0$ のとき　$-(m^2-5)<0$　すなわち　$m<-\sqrt{5},\ \sqrt{5}<m$

したがって，双曲線 ① と直線 ② の共有点の個数は，次のようになる。

$-\sqrt{5}<m<-1$，$-1<m<1$，$1<m<\sqrt{5}$ のとき　2 個

$m=\pm\sqrt{5}$ のとき　1 個

$m<-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}<m$ のとき　0 個

[2] $1-m^2=0$ すなわち $m=\pm1$ のとき

x の方程式 ③ は 1 次方程式となり，この方程式を解くと　$x=-\dfrac{5}{4m}$

したがって，双曲線 ① と直線 ② の共有点の個数は　1 個

[1]，[2] より，双曲線 ① と直線 ② の共有点の個数は，次のようになる。

$m=\pm1$ の議論 2

$-\sqrt{5}<m<-1$，$-1<m<1$，$1<m<\sqrt{5}$ のとき　2 個

$m=\pm1$，$\pm\sqrt{5}$ のとき　1 個

$m<-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}<m$ のとき　0 個

16 曲線 $13x^2-6\sqrt{3}xy+7y^2=16$ を，原点を中心として $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転移動するとき，移動後の曲線の方程式を求めよ。

解答 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 5

曲線 $13x^2-6\sqrt{3}xy+7y^2=16$ 上の点 Q$(s,\ t)$ が，原点を中心とする $-\dfrac{\pi}{3}$ の回転によって，点 P$(x,\ y)$ に移るとする。

このとき，点 Q は，点 P を原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから，複素数平面で考えると

$$s+ti=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(x+yi)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x+yi)$$
$$=\frac{1}{2}(x-\sqrt{3}y)+\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y)i$$

よって

$s=\dfrac{1}{2}(x-\sqrt{3}y),\ t=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x+y)$ ……①　3

点 Q は曲線 $13x^2-6\sqrt{3}xy+7y^2=16$ 上にあるから　$13s^2-6\sqrt{3}st+7t^2=16$

① を代入して整理すると　$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

17 楕円 $2x^2+y^2=4$ と直線 $y=x+k$ が異なる 2 つの共有点 P，Q をもつとき，線分 PQ の中点 R の軌跡を求めよ。

解答 直線 $y=-2x$ の $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ の部分 6

$2x^2+y^2=4$ ……①　$y=x+k$ ……②

② を ① に代入すると　$2x^2+(x+k)^2=4$

整理すると　$3x^2+2kx+k^2-4=0$ ……③

x の 2 次方程式 ③ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=k^2-3(k^2-4)=-2(k^2-6)$

楕円 ① と直線 ② が異なる 2 点で交わるのは，$D>0$ のときである。

よって，$-2(k^2-6)>0$ より　$-\sqrt{6}<k<\sqrt{6}$　2

点 P，Q の x 座標をそれぞれ x_1，x_2 とすると，x_1，x_2 は 2 次方程式 ③ の異なる 2 つの実数解である。

点 R は線分 PQ の中点であるから，その座標を $(X,\ Y)$ とすると　$X=\dfrac{x_1+x_2}{2}$

③ において，解と係数の関係により　$x_1+x_2=-\dfrac{2}{3}k$

よって　$X=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{1}{3}k$

② から　$Y=-\dfrac{1}{3}k+k=\dfrac{2}{3}k$

k を消去して　$Y=-2X$　3

$X=-\dfrac{1}{3}k$ と $-\sqrt{6}<k<\sqrt{6}$ から　$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}<X<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

よって，点 R は，直線 $y=-2x$ の $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ の部分にある。

逆に，この図形上のすべての点 R$(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，点 R の軌跡は　直線 $y=-2x$ の $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ の部分

/32