数学演習（複素数平面の総合問題）Ｒ２．２．３　　(　)組(　)番　名前(　　　　　　　　)

1 $a>1$ のとき，x の方程式 $ax^2-2x+a=0$ ……① の 2 つの解を α，β とし，x の方程式 $x^2-2ax+1=0$ …… ② の 2 つの解を γ，δ とする。A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) とするとき，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にあることを証明せよ。

2 (1) 複素数平面上の 3 点 z，z^2，z^3 が三角形の頂点となるための条件を求めよ。

(2) 複素数平面上の 3 点 z，z^2，z^3 が，二等辺三角形の頂点になるような点 z の全体を複素数平面上に図示せよ。また，正三角形の頂点になるような z の値を求めよ。

3 $z_1=3$，$z_{n+1}=(1+i)z_n+i$ $(n\geqq 1)$ によって定まる複素数の数列 $\{z_n\}$ について

(1) z_n を求めよ。

(2) z_n が表す複素数平面の点を P_n とする。P_n，P_{n+1}，P_{n+2} を 3 頂点とする三角形の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は $a_1=b_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a_n-\dfrac{\sqrt{6}}{4}b_n$，$b_{n+1}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a_n+\dfrac{\sqrt{2}}{4}b_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を満たすものとする。a_n を実部，b_n を虚部とする複素数を z_n で表すとき

(1) $z_{n+1}=wz_n$ を満たす複素数 w と，その絶対値 $|w|$ を求めよ。

(2) 複素数平面上で，点 z_{n+1} は点 z_n をどのように移動した点であるかを答えよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 複素数平面上の 3 点 0，z_n，z_{n+1} を頂点とする三角形の周と内部を塗りつぶしてできる図形を T_n とする。このとき，複素数平面上で T_1，T_2，……，T_n，…… によって塗りつぶされる領域の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ 偏角 θ が 0 より大きく $\dfrac{\pi}{2}$ より小さい複素数 $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ を考える。

$z_0=0$，$z_1=1$ とし，$z_k-z_{k-1}=\alpha(z_{k-1}-z_{k-2})$ $(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ により数列 $\{z_k\}$ を定義するとき，複素数平面上で $z_k\,(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ の表す点を P_k とする。

(1) z_k を α を用いて表せ。

(2) $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{1-\alpha}\right)$ とするとき，点 $\mathrm{P}_k\,(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は点 A を中心とする 1 つの円周上にあることを示せ。

$\boxed{6}$ z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形をなすような点 z の範囲を求め，図示せよ。

1 $a>1$ のとき，x の方程式 $ax^2-2x+a=0$ ……① の 2 つの解を α，β とし，x の方程式 $x^2-2ax+1=0$ ……② の 2 つの解を γ，δ とする。A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) とするとき，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にあることを証明せよ。

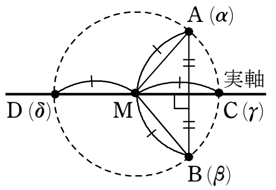
解答　略

解説

①，② の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると，$a>1$ から

$$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-a\cdot a=1-a^2<0,\quad \frac{D_2}{4}=(-a)^2-1\cdot1=a^2-1>0$$

よって，α，β は互いに共役な複素数であり，γ，δ は実数である。ゆえに，点 C，D は実軸上にあり，線分 CD の中点 M を表す複素数は　$\dfrac{\gamma+\delta}{2}=\dfrac{2a}{2}=a$



$\beta=\overline{\alpha}$ とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\overline{\alpha}=\frac{2}{a},\quad \alpha\overline{\alpha}=1$$

よって　$MA^2=|\alpha-a|^2=(\alpha-a)(\overline{\alpha}-a)=\alpha\overline{\alpha}-a(\alpha+\overline{\alpha})+a^2$

$$=1-a\cdot\frac{2}{a}+a^2=a^2-1$$

ゆえに　$MA=\sqrt{a^2-1}$　　同様に　$MB=|\overline{\alpha}-a|=\sqrt{a^2-1}$

また　$CD^2=(\delta-\gamma)^2=(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta=(2a)^2-4\cdot1=4(a^2-1)$

よって　$CD=2\sqrt{a^2-1}$　　ゆえに　$MC=MD=\sqrt{a^2-1}$

したがって，4 点 A，B，C，D は点 a を中心とする半径 $\sqrt{a^2-1}$ の円周上にある。

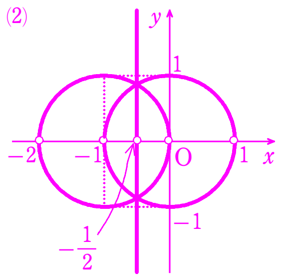
2 (1)　複素数平面上の 3 点 z，z^2，z^3 が三角形の頂点となるための条件を求めよ。

(2)　複素数平面上の 3 点 z，z^2，z^3 が，二等辺三角形の頂点になるような点 z の全体を複素数平面上に図示せよ。また，正三角形の頂点になるような z の値を求めよ。

解答　(1)　z が虚数であること

(2)　[図]，$z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(2)



解説

(1)　3 点 z，z^2，z^3 がすべて互いに異なるための条件は

$z\neq z^2$ から　$z\neq0$，$z\neq1$　　$z^2\neq z^3$ から　$z\neq0$，$z\neq1$

$z\neq z^3$ から　$z\neq0$，$z\neq\pm1$　　よって　$z\neq0$，$z\neq\pm1$ ……①

また，① のとき　$\dfrac{z^3-z}{z^2-z}=\dfrac{z(z+1)(z-1)}{z(z-1)}=z+1$ ……②

3 点 z，z^2，z^3 が一直線上にないための条件は，② が実数とならないこと，すなわち，z が虚数であることである。

(2)　(前半)　z が虚数のとき，3 点 z，z^2，z^3 が二等辺三角形の頂点になる場合には，次の [1]，[2]，[3] がある。

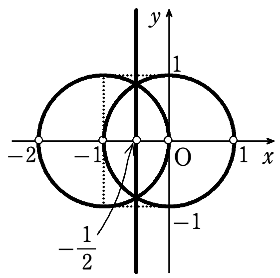
[1]　$|z^2-z|=|z^3-z^2|$　　[2]　$|z^3-z^2|=|z-z^3|$

[3]　$|z-z^3|=|z^2-z|$

$z\neq0$，$z\pm1\neq0$ であるから，[1]，[2]，[3] はそれぞれ次の [1]′，[2]′，[3]′ と同値である。

[1]′　$|z|=1$　　[2]′　$|z|=|z+1|$　　[3]′　$|z+1|=1$

よって，点 z の全体は，[1]′，[2]′，[3]′ の方程式が表す図形の和集合から，実軸上の点を除いた図形であり，右図のようになる。



(後半)　3 点 z，z^2，z^3 が正三角形の頂点になるのは，(前半) の [1]，[2] が同時に成り立つときである。円 $|z|=1$ と直線 $|z|=|z+1|$ の交点を表す複素数を求めて

$$z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

3 $z_1=3$，$z_{n+1}=(1+i)z_n+i$ $(n\geqq1)$ によって定まる複素数の数列 $\{z_n\}$ について

(1)　z_n を求めよ。

(2)　z_n が表す複素数平面の点を P_n とする。P_n，P_{n+1}，P_{n+2} を 3 頂点とする三角形の面積を求めよ。

解答　(1)　$z_n=4(1+i)^{n-1}-1$　　(2)　2^{n+2}

解説

(1)　$z_{n+1}=(1+i)z_n+i$ から　　$z_{n+1}+1=(1+i)(z_n+1)$

よって，数列 $\{z_n+1\}$ は初項 $z_1+1=4$，公比 $1+i$ の等比数列であるから

$$z_n+1=4\cdot(1+i)^{n-1}\qquad ゆえに\quad z_n=4(1+i)^{n-1}-1$$

(2)　(1) から　　$z_{n+1}-z_n=4(1+i)^n-4(1+i)^{n-1}=4(1+i)^{n-1}\{(1+i)-1\}$

$$=4i(1+i)^{n-1}$$

よって　$P_nP_{n+1}=|z_{n+1}-z_n|=|4i(1+i)^{n-1}|=4|i||1+i|^{n-1}=4(\sqrt{2})^{n-1}$

ゆえに　$P_{n+1}P_{n+2}=4(\sqrt{2})^{(n+1)-1}=4(\sqrt{2})^n$

また　$\dfrac{z_n-z_{n+1}}{z_{n+2}-z_{n+1}}=\dfrac{-4i(1+i)^{n-1}}{4i(1+i)^n}=-\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{-1+i}{2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

よって，$\arg\dfrac{z_n-z_{n+1}}{z_{n+2}-z_{n+1}}=\dfrac{3}{4}\pi$ から　　$\angle P_{n+2}P_{n+1}P_n=\dfrac{3}{4}\pi$

したがって，$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot4(\sqrt{2})^{n-1}\cdot4(\sqrt{2})^n\sin\frac{3}{4}\pi=8\cdot2^{\frac{n-1}{2}}\cdot2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}\cdot2^{n-\frac{1}{2}}=2^{n+2}$$

4 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は $a_1=b_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a_n-\dfrac{\sqrt{6}}{4}b_n$，$b_{n+1}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a_n+\dfrac{\sqrt{2}}{4}b_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を満たすものとする。a_n を実部，b_n を虚部とする複素数を z_n で表すとき

(1)　$z_{n+1}=wz_n$ を満たす複素数 w と，その絶対値 $|w|$ を求めよ。

(2)　複素数平面上で，点 z_{n+1} は点 z_n をどのように移動した点であるかを答えよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4)　複素数平面上の 3 点 0，z_n，z_{n+1} を頂点とする三角形の周と内部を塗りつぶしてできる図形を T_n とする。このとき，複素数平面上で T_1，T_2，……，T_n，…… によって塗りつぶされる領域の面積を求めよ。

解答　(1)　$w=\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{6}}{4}i$，$|w|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2)　原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転し，原点からの距離を $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 倍した点

(3)　$a_n=4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\cos\left(\dfrac{n}{3}-\dfrac{1}{12}\right)\pi$，$b_n=4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\sin\left(\dfrac{n}{3}-\dfrac{1}{12}\right)\pi$

(4)　$\dfrac{63\sqrt{6}}{32}$

解説

(1)　自然数 n に対し，$z_n=a_n+b_ni$ であるから

$$z_{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}i=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a_n-\frac{\sqrt{6}}{4}b_n\right)+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}a_n+\frac{\sqrt{2}}{4}b_n\right)i$$

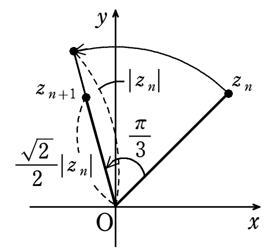
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}i\right)a_n+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}i\right)b_ni$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}i\right)(a_n+b_ni)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}i\right)z_n$$

ゆえに　$w=\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{6}}{4}i$，$|w|=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2)　(1) から　　$w=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$



よって，点 z_{n+1} は点 z_n を原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転し，原点からの距離を $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 倍した点である。

(3)　$z_{n+1}=wz_n$ から　　$z_n=z_1w^{n-1}$

ここで　$z_1=2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$　　また，ド・モアブルの定理から

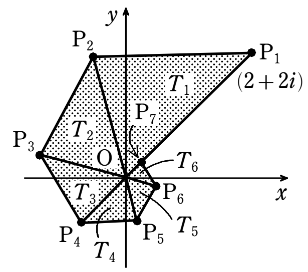
$$w^{n-1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{3}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right\}$$

ゆえに　$z_n=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\left\{\cos\dfrac{(n-1)\pi}{3}+i\sin\dfrac{(n-1)\pi}{3}\right\}$

$$=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left\{\cos\left(\frac{n}{3}-\frac{1}{12}\right)\pi+i\sin\left(\frac{n}{3}-\frac{1}{12}\right)\pi\right\}$$

よって　$a_n=4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\cos\left(\dfrac{n}{3}-\dfrac{1}{12}\right)\pi$，$b_n=4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\sin\left(\dfrac{n}{3}-\dfrac{1}{12}\right)\pi$

(4)　(2) の結果に注意して，T_1，T_2，……，T_6 を図示すると，右の図のようになり，T_7，T_8，…… は右の図の黒く塗った部分に含まれる。



よって，求める面積は，T_1，T_2，……，T_6 の面積の総和である。

O を原点，$P_n(z_n)$ とすると，(2) から

$$OP_n:OP_{n+1}=OP_{n+1}:OP_{n+2}$$
$$=|z_n|:|z_{n+1}|=2:\sqrt{2},$$

$$\angle P_nOP_{n+1}=\angle P_{n+1}OP_{n+2}=\frac{\pi}{3}$$

ゆえに，$T_n\backsim T_{n+1}$ で，T_n と T_{n+1} の面積比は　　$2^2:(\sqrt{2})^2=2:1$

T_1 の面積は $\dfrac{1}{2}|z_1||z_2|\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$ であるから，T_n の面積は

$\sqrt{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって，求める面積は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\sqrt{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\sqrt{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{6}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{63\sqrt{6}}{32}$

$\boxed{5}$ 偏角 θ が 0 より大きく $\frac{\pi}{2}$ より小さい複素数 $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ を考える。
$z_0=0$，$z_1=1$ とし，$z_k-z_{k-1}=\alpha(z_{k-1}-z_{k-2})$ $(k=2, 3, 4, \cdots\cdots)$ により数列 $\{z_k\}$ を定義するとき，複素数平面上で z_k $(k=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ の表す点を P_k とする。
(1)　z_k を α を用いて表せ。
(2)　$\mathrm{A}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ とするとき，点 P_k $(k=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ は点 A を中心とする 1 つの円周上にあることを示せ。

解答　(1)　$z_k=\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}$　　(2)　略

解説
(1)　$z_k-z_{k-1}=\alpha(z_{k-1}-z_{k-2})$ から

$$z_k-z_{k-1}=\alpha(z_{k-1}-z_{k-2})=\alpha\cdot\alpha(z_{k-2}-z_{k-3})=\alpha^2(z_{k-2}-z_{k-3})$$
$$=\cdots\cdots=\alpha^{k-1}(z_1-z_0)=\alpha^{k-1}$$

よって，$k\geqq1$ のとき，$\alpha\neq1$ であるから

$$z_k=z_0+\sum_{n=0}^{k-1}(z_{n+1}-z_n)=z_0+\sum_{n=0}^{k-1}\alpha^n=0+\frac{1\cdot(1-\alpha^k)}{1-\alpha}$$
$$=\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\quad\cdots\cdots①$$

① は $k=0$ のときも成り立つ。

したがって　$z_k=\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}$

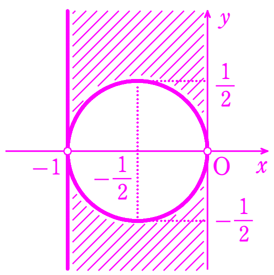
(2)　$\mathrm{AP}_k=\left|z_k-\frac{1}{1-\alpha}\right|=\left|\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right|$

$$=\frac{|-\alpha^k|}{|1-\alpha|}=\frac{|\alpha|^k}{|1-\alpha|}=\frac{1}{|1-\alpha|}\quad(k=0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

ゆえに，点 P_k $(k=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ は点 A を中心とする半径 $\frac{1}{|1-\alpha|}$ の円周上にある。

$\boxed{6}$ z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) が鋭角三角形をなすような点 z の範囲を求め，図示せよ。

解答　[図] 境界線を含まない



解説
3 点 A，B，C が鋭角三角形をなすための条件は，次の (i)，(ii)，(iii) を同時に満たすことである。
(i)　3 点 A，B，C がすべて互いに異なる。
(ii)　3 点 A，B，C が一直線上にない。
(iii)　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2>\mathrm{CA}^2$ かつ $\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>\mathrm{AB}^2$ かつ $\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2>\mathrm{BC}^2$

(i) から　$z\neq1$，$z^2\neq1$，$z^2\neq z$　　ゆえに　$z\neq0$，$z\neq\pm1$　$\cdots\cdots①$

また，$\frac{z^2-1}{z-1}=z+1$ であるから，(ii) より $z+1$ は実数ではない。すなわち，z は虚数である。

ここで，z が虚数である，という条件は ① を含んでいる。

(iii) から　$\begin{cases}|z-1|^2+|z^2-z|^2>|1-z^2|^2\\|z^2-z|^2+|1-z^2|^2>|z-1|^2\\|1-z^2|^2+|z-1|^2>|z^2-z|^2\end{cases}$

ゆえに　$\begin{cases}|z-1|^2+|z|^2|z-1|^2>|z+1|^2|z-1|^2\\|z|^2|z-1|^2+|z+1|^2|z-1|^2>|z-1|^2\\|z+1|^2|z-1|^2+|z-1|^2>|z|^2|z-1|^2\end{cases}$

$z\neq1$ であるから，各不等式の両辺を $|z-1|^2(>0)$ で割ると

$\begin{cases}1+|z|^2>|z+1|^2\quad\cdots\cdots②\\|z|^2+|z+1|^2>1\quad\cdots\cdots③\\|z+1|^2+1>|z|^2\quad\cdots\cdots④\end{cases}$

② から　$1+z\overline{z}>z\overline{z}+z+\overline{z}+1$

よって　$z+\overline{z}<0$　すなわち　$(z\text{ の実部})<0$　$\cdots\cdots⑤$

③ から　$z\overline{z}+z\overline{z}+z+\overline{z}+1>1$　　よって　$z\overline{z}+\frac{z}{2}+\frac{\overline{z}}{2}>0$

ゆえに　$\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2>0$

よって　$\left|z+\frac{1}{2}\right|^2>\left(\frac{1}{2}\right)^2$　すなわち　$\left|z+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$　$\cdots\cdots⑥$

④ から　$z\overline{z}+z+\overline{z}+1+1>z\overline{z}$

ゆえに　$z+\overline{z}>-2$　　よって　$\frac{z+\overline{z}}{2}>-1$

すなわち　$(z\text{ の実部})>-1$　$\cdots\cdots⑦$

求める z の範囲は，⑤，⑥，⑦ の表す図形の共通部分から実軸上の点を除いたもので，右図の斜線部分のようになる。
ただし，境界線を含まない。