数学演習（複素数と図形）Ｒ２．２．２　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

1 複素数平面上の 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) について

(1) $\alpha=1+2i$，$\beta=-2+4i$，$\gamma=2-ai$ とする。このとき，次のものを求めよ。

（ア） $a=3$ のとき，$\angle$BAC の大きさと $\triangle$ABC の面積

（イ） $a=16$ のとき，$\angle$CBA の大きさ

(2) $\alpha=-1-i$，$\beta=i$，$\gamma=b-2i$ (b は実数の定数) とする。

（ア） 3 点 A，B，C が一直線上にあるように，b の値を定めよ。

（イ） 2 直線 AB，AC が垂直であるように，b の値を定めよ。

2 異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) が次の条件を満たすとき，$\triangle$ABC の 3 つの角の大きさを求めよ。

(1) $\beta-\alpha=(1+\sqrt{3}\,i)(\gamma-\alpha)$

(2) $\alpha+i\beta=(1+i)\gamma$

3 異なる 3 点 O(0)，A(α)，B(β) に対し，等式 $2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ が成り立つとき

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ。

(2) $\triangle$OAB はどんな形の三角形か。

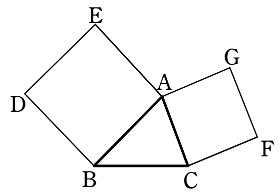
$\boxed{4}$ 原点 O とは異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) がある。

(1)　$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$ が成り立つとき，△OAB はどんな形の三角形か。

(2)　$3\alpha^2+4\beta^2+\gamma^2-6\alpha\beta-2\beta\gamma=0$ が成り立つとき

（ア）　γ を α，β で表せ。　　（イ）　△ABC はどんな形の三角形か。

$\boxed{5}$ 右の図のように，△ABC の外側に，正方形 ABDE および正方形 ACFG を作るとき，次の問いに答えよ。



(1)　複素数平面上で A(0)，B(β)，C(γ) とするとき，点 E，G を表す複素数を求めよ。

(2)　線分 EG の中点を M とするとき，2AM＝BC，AM⊥BC であることを証明せよ。

$\boxed{6}$ 単位円上の異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) と，この円上にない点 H(z) について，等式 $z=\alpha+\beta+\gamma$ が成り立つとき，H は △ABC の垂心であることを証明せよ。

$\boxed{7}$ 異なる 3 点 O(0)，A(α)，B(β) を頂点とする △OAB の内心を P(z) とする。このとき，z は次の等式を満たすことを示せ。

$$z=\frac{|\beta|\alpha+|\alpha|\beta}{|\alpha|+|\beta|+|\beta-\alpha|}$$

$\boxed{8}$ 点 P(z) が次の直線上にあるとき，z が満たす関係式を求めよ。

(1) 2 点 $2+i$，3 を通る直線

(2) 点 $-4+4i$ を中心とする半径 $\sqrt{13}$ の円上の点 $-2+i$ における接線

$\boxed{9}$ 複素数平面上の原点を O とし，O と異なる定点を A(α) とする。異なる 2 点 P(z) と Q(w) が直線 OA に関して対称であるとき，$\overline{\alpha}w=\alpha\overline{z}$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{10}$ 3 点 A(-1)，B(1)，C$(\sqrt{3}\,i)$ を頂点とする △ABC が正三角形であることを用いて，3 点 P(α)，Q(β)，R(γ) を頂点とする △PQR が正三角形であるとき，等式 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{11}$ (1)　4 点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) を頂点とする四角形 ABCD について，次のことを証明せよ。

$$\text{四角形 ABCD が円に内接する} \iff \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma} \div \frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta} > 0$$

(2)　4 点 A$(7+i)$，B$(1+i)$，C$(-6i)$，D(8) を頂点とする四角形 ABCD は，円に内接することを示せ。

$\boxed{12}$ $a>0$ とする。複素数平面上で，等式 $|z-ia|=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ を満たす点 z 全体の表す図形を C とする。

(1)　$z=x+iy$ と表すとき，C の方程式を $y=f(x)$ の形で表せ。

(2)　C 上の点 z で $|z-(2+2i)|=|z+(2+2i)|$ を満たすものを求めよ。

数学演習（複素数と図形）Ｒ２．２．２　　　　(　)組(　)番　名前(　　　　　　　　)

1 複素数平面上の 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) について

(1) $\alpha=1+2i$，$\beta=-2+4i$，$\gamma=2-ai$ とする。このとき，次のものを求めよ。

(ア) $a=3$ のとき，$\angle$BAC の大きさと $\triangle$ABC の面積

(イ) $a=16$ のとき，$\angle$CBA の大きさ

(2) $\alpha=-1-i$，$\beta=i$，$\gamma=b-2i$ (b は実数の定数) とする。

(ア) 3 点 A，B，C が一直線上にあるように，b の値を定めよ。

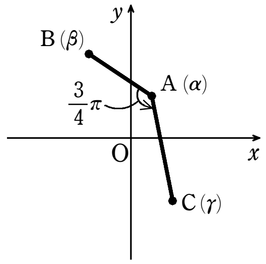
(イ) 2 直線 AB，AC が垂直であるように，b の値を定めよ。

解答 (1) (ア) 順に $\frac{3}{4}\pi$，$\frac{13}{2}$　(イ) $\frac{\pi}{4}$　(2) (ア) $b=-\frac{3}{2}$　(イ) $b=1$

解説

(1) (ア) $a=3$ のとき，$\gamma=2-3i$ であるから

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{2-3i-(1+2i)}{-2+4i-(1+2i)}=\frac{1-5i}{-3+2i}$$
$$=\frac{(1-5i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=-1+i$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$



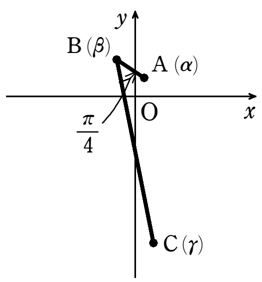
よって，$\angle$BAC の大きさは　$\frac{3}{4}\pi$

また　$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+2^2}\sqrt{1^2+(-5)^2}\sin\frac{3}{4}\pi$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{13}{2}$$

(イ) $a=16$ のとき，$\gamma=2-16i$ であるから

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=\frac{1+2i-(-2+4i)}{2-16i-(-2+4i)}=\frac{3-2i}{4-20i}$$
$$=\frac{(3-2i)(1+5i)}{4(1-5i)(1+5i)}=\frac{1+i}{8}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$



よって，$\angle$CBA の大きさは　$\frac{\pi}{4}$

(2) $$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(b-2i)-(-1-i)}{i-(-1-i)}=\frac{b+1-i}{1+2i}$$
$$=\frac{(b+1-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{b-1-(2b+3)i}{5}\quad\cdots\cdots ①$$

(ア) 3 点 A，B，C が一直線上にあるための条件は，① が実数となることであるから

$2b+3=0$　　よって　$b=-\frac{3}{2}$

(イ) 2 直線 AB，AC が垂直であるための条件は，① が純虚数となることであるから

$b-1=0$　かつ　$2b+3\neq0$　　ゆえに　$b=1$

2 異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) が次の条件を満たすとき，$\triangle$ABC の 3 つの角の大きさを求めよ。

(1) $\beta-\alpha=(1+\sqrt{3}i)(\gamma-\alpha)$　　(2) $\alpha+i\beta=(1+i)\gamma$

解答 (1) $\angle A=\frac{\pi}{3}$，$\angle B=\frac{\pi}{6}$，$\angle C=\frac{\pi}{2}$　(2) $\angle A=\frac{\pi}{4}$，$\angle B=\frac{\pi}{4}$，$\angle C=\frac{\pi}{2}$

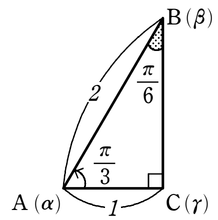
解説

(1) $\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ゆえに　$\left|\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\right|=\frac{|\beta-\alpha|}{|\gamma-\alpha|}=\frac{AB}{AC}=2$

よって　AB : AC $=2:1$

また，$\arg\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=\frac{\pi}{3}$ から　$\angle CAB=\frac{\pi}{3}$



ゆえに，$\triangle$ABC は AB : BC : CA $=2:\sqrt{3}:1$ の直角三角形であり　$\angle A=\frac{\pi}{3}$，$\angle B=\frac{\pi}{6}$，$\angle C=\frac{\pi}{2}$

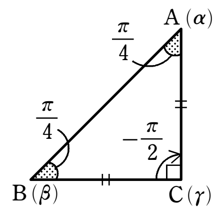
(2) $\alpha+i\beta=(1+i)\gamma$ から　$\alpha-\gamma=(\gamma-\beta)i$

よって　$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=-i$

ゆえに　$\left|\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\right|=\frac{|\alpha-\gamma|}{|\beta-\gamma|}=\frac{CA}{CB}=1$

よって　CA $=$ CB

また，$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}$ は純虚数であるから　CA$\perp$CB



ゆえに，$\triangle$ABC は CA $=$ CB の直角二等辺三角形であるから

$\angle A=\frac{\pi}{4}$，$\angle B=\frac{\pi}{4}$，$\angle C=\frac{\pi}{2}$

3 異なる 3 点 O(0)，A(α)，B(β) に対し，等式 $2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ が成り立つとき

(1) $\frac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ。　　(2) $\triangle$OAB はどんな形の三角形か。

解答 (1) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1\pm i}{2}$　(2) $\angle A=\frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形

解説

(1) $\beta\neq0$ より，$\beta^2\neq0$ であるから，等式 $2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ の両辺を β^2 で割ると

$$2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-2\cdot\frac{\alpha}{\beta}+1=0$$

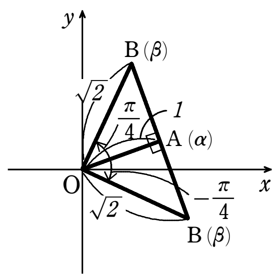
したがって　$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-2\cdot1}}{2}=\frac{1\pm i}{2}$

(2) (1) から　$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right\}$ (複号同順)

ゆえに　$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}=\frac{OA}{OB}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって　OA : OB $=1:\sqrt{2}$

また，$\arg\frac{\alpha}{\beta}=\pm\frac{\pi}{4}$ から　$\angle BOA=\frac{\pi}{4}$



したがって，$\triangle$OAB は $\angle A=\frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である。

別解　等式から　$(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+\alpha^2=0$　　よって　$(\alpha-\beta)^2=-\alpha^2$

ゆえに　$\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\right)^2=-1$　　よって　$\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\pm i$

すなわち，$\frac{\beta-\alpha}{0-\alpha}=\pm i$ (純虚数) であるから，$\left|\frac{\beta-\alpha}{0-\alpha}\right|=1$ より　BA $=$ OA

また　BA$\perp$OA　　したがって　$\angle A=\frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形

4 原点 O とは異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) がある。

(1) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$ が成り立つとき，$\triangle$OAB はどんな形の三角形か。

(2) $3\alpha^2+4\beta^2+\gamma^2-6\alpha\beta-2\beta\gamma=0$ が成り立つとき

(ア) γ を α，β で表せ。　　(イ) $\triangle$ABC はどんな形の三角形か。

解答 (1) OA $=$ OB，$\angle O=\frac{2}{3}\pi$ の二等辺三角形

(2) (ア) $\gamma=\beta\pm\sqrt{3}(\alpha-\beta)i$

(イ) $\angle A=\frac{\pi}{3}$，$\angle B=\frac{\pi}{2}$，$\angle C=\frac{\pi}{6}$ の直角三角形

解説

(1) $\beta^2\neq0$ であるから，等式の両辺を β^2 で割ると　$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\frac{\alpha}{\beta}+1=0$

よって　$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

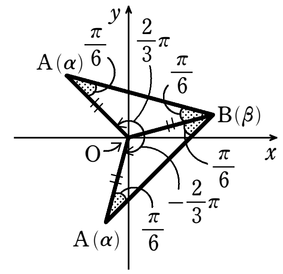
$$=\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)\quad(\text{複号同順})$$

ゆえに　$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}=\frac{OA}{OB}=1$

よって　OA $=$ OB

また，$\arg\frac{\alpha}{\beta}=\pm\frac{2}{3}\pi$ であるから

$\angle BOA=\frac{2}{3}\pi$



したがって，$\triangle$OAB は OA $=$ OB，$\angle O=\frac{2}{3}\pi$ の二等辺三角形である。

(2) (ア) $3\alpha^2+4\beta^2+\gamma^2-6\alpha\beta-2\beta\gamma=0$ から

$$3\alpha^2-6\alpha\beta+3\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma+\beta^2=0$$

よって　$3(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\beta)^2=0$

$\alpha\neq\beta$ であるから　$\left(\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\right)^2=-3$　　ゆえに　$\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=\pm\sqrt{3}i$ …… ①

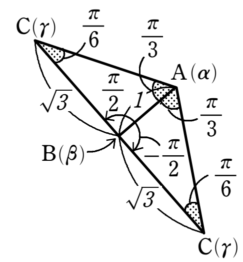
したがって　$\gamma=\beta\pm\sqrt{3}(\alpha-\beta)i$

(イ) ① から

$\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=\sqrt{3}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ (複号同順)

ゆえに　$\left|\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\right|=\frac{|\gamma-\beta|}{|\alpha-\beta|}=\frac{BC}{BA}=\sqrt{3}$

また，$\arg\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=\pm\frac{\pi}{2}$ であるから　$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$



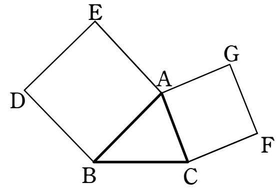
したがって，$\triangle$ABC は $\angle A=\frac{\pi}{3}$，$\angle B=\frac{\pi}{2}$，

$\angle C=\frac{\pi}{6}$ の直角三角形である。

$\boxed{5}$ 右の図のように，△ABC の外側に，正方形 ABDE および正方形 ACFG を作るとき，次の問いに答えよ。

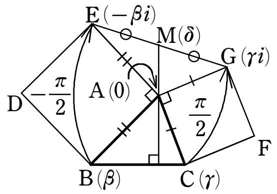
(1) 複素数平面上で A(0)，B(β)，C(γ) とするとき，点 E，G を表す複素数を求めよ。

(2) 線分 EG の中点を M とするとき，2AM＝BC，AM⊥BC であることを証明せよ。



解答 (1) E$(-\beta i)$，G(γi) (2) 略

解説



(1) 点 E は，点 B(β) を原点 A を中心として $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから　E$(-\beta i)$

点 G は，点 C(γ) を原点 A を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから　G(γi)

(2) M(δ) とすると　$\delta=\dfrac{-\beta i+\gamma i}{2}=\dfrac{(\gamma-\beta)i}{2}$

よって　$2\mathrm{AM}=2\left|\dfrac{(\gamma-\beta)i}{2}-0\right|=|\gamma-\beta||i|=|\gamma-\beta|$

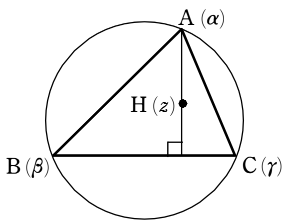
$\mathrm{BC}=|\gamma-\beta|$ であるから　2AM＝BC

また，$\dfrac{\gamma-\beta}{\dfrac{(\gamma-\beta)i}{2}-0}=\dfrac{2}{i}=-2i$ (純虚数) であるから　AM⊥BC

$\boxed{6}$ 単位円上の異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) と，この円上にない点 H(z) について，等式 $z=\alpha+\beta+\gamma$ が成り立つとき，H は △ABC の垂心であることを証明せよ。

解答 略

解説



3 点 A(α)，B(β)，C(γ) は単位円上にあるから

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$　すなわち　$|\alpha|^2=|\beta|^2=|\gamma|^2=1$

よって　$\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=\gamma\overline{\gamma}=1$

$\alpha\neq0$，$\beta\neq0$，$\gamma\neq0$ であるから

$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$，$\overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$，$\overline{\gamma}=\dfrac{1}{\gamma}$

A，B，C，H はすべて異なる点であるから，$\dfrac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\neq0$

で

$$\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}+\overline{\left(\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\right)}=\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}+\overline{\left(\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}\right)}=\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\overline{\gamma}-\overline{\beta}}{\overline{\beta}+\overline{\gamma}}$$

$$=\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}=\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\beta-\gamma}{\gamma+\beta}=0$$

よって，$\dfrac{\gamma-\beta}{z-\alpha}$ は純虚数である。　ゆえに　AH⊥BC

同様にして　BH⊥CA

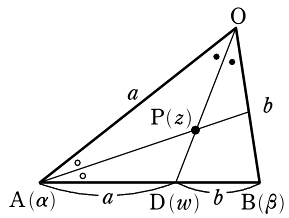
したがって，H は △ABC の垂心である。

$\boxed{7}$ 異なる 3 点 O(0)，A(α)，B(β) を頂点とする △OAB の内心を P(z) とする。このとき，z は次の等式を満たすことを示せ。

$$z=\frac{|\beta|\alpha+|\alpha|\beta}{|\alpha|+|\beta|+|\beta-\alpha|}$$

解答 略

解説



$\mathrm{OA}=|\alpha|=a$，$\mathrm{OB}=|\beta|=b$，$\mathrm{AB}=|\beta-\alpha|=c$ とおく。

また，∠AOB の二等分線と辺 AB の交点を D(w) とする。

AD : DB＝OA : OB＝$a:b$

であるから　$w=\dfrac{b\alpha+a\beta}{a+b}$

P は ∠OAB の二等分線と OD の交点であるから

OP : PD＝OA : AD＝$a:\left(\dfrac{a}{a+b}\cdot c\right)$

＝$(a+b):c$

ゆえに　OP : OD＝$(a+b):(a+b+c)$

よって　$z=\dfrac{a+b}{a+b+c}w=\dfrac{a+b}{a+b+c}\cdot\dfrac{b\alpha+a\beta}{a+b}=\dfrac{b\alpha+a\beta}{a+b+c}$

すなわち　$z=\dfrac{|\beta|\alpha+|\alpha|\beta}{|\alpha|+|\beta|+|\beta-\alpha|}$

$\boxed{8}$ 点 P(z) が次の直線上にあるとき，z が満たす関係式を求めよ。

(1) 2 点 $2+i$，3 を通る直線

(2) 点 $-4+4i$ を中心とする半径 $\sqrt{13}$ の円上の点 $-2+i$ における接線

解答 (1) $(1+i)z-(1-i)\overline{z}=6i$ (2) $(2+3i)z+(2-3i)\overline{z}+14=0$

解説

(1) 3 点 $2+i$，3，z は一直線上にあるから，$\dfrac{z-3}{(2+i)-3}=\dfrac{z-3}{-1+i}$ は実数である。

ゆえに　$\overline{\left(\dfrac{z-3}{-1+i}\right)}=\dfrac{z-3}{-1+i}$　すなわち　$\dfrac{\overline{z}-3}{-1-i}=\dfrac{z-3}{-1+i}$

よって　$(1-i)(\overline{z}-3)=(1+i)(z-3)$

整理して，求める関係式は　$(1+i)z-(1-i)\overline{z}=6i$

(2) A$(-4+4i)$，B$(-2+i)$ とすると，AB⊥BP であるか，点 P は点 B と一致するから，

$\dfrac{z-(-2+i)}{-4+4i-(-2+i)}=\dfrac{z+2-i}{-2+3i}$ は純虚数または 0 である。

よって　$\dfrac{z+2-i}{-2+3i}+\overline{\left(\dfrac{z+2-i}{-2+3i}\right)}=0$

ゆえに　$\dfrac{z+2-i}{-2+3i}+\dfrac{\overline{z}+2+i}{-2-3i}=0$

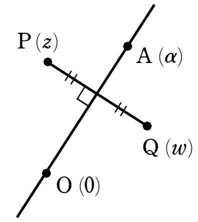
よって　$(2+3i)(z+2-i)+(2-3i)(\overline{z}+2+i)=0$

整理して，求める関係式は　$(2+3i)z+(2-3i)\overline{z}+14=0$

$\boxed{9}$ 複素数平面上の原点を O とし，O と異なる定点を A(α) とする。異なる 2 点 P(z) と Q(w) が直線 OA に関して対称であるとき，$\overline{\alpha}w=\alpha\overline{z}$ が成り立つことを証明せよ。

解答 略

解説



PQ⊥OA であるから，$\dfrac{z-w}{\alpha-0}$ は純虚数である。

よって，$\dfrac{z-w}{\alpha}+\overline{\left(\dfrac{z-w}{\alpha}\right)}=0$ から

$\dfrac{z-w}{\alpha}+\dfrac{\overline{z}-\overline{w}}{\overline{\alpha}}=0$

ゆえに　$\overline{\alpha}(z-w)+\alpha(\overline{z}-\overline{w})=0$

よって　$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}w-\alpha\overline{w}=0$　…… ①

また，線分 PQ の中点 $\dfrac{z+w}{2}$ が直線 OA 上にあるから，$\dfrac{\dfrac{z+w}{2}-0}{\alpha-0}=\dfrac{z+w}{2\alpha}$ は実数である。

ゆえに，$\overline{\left(\dfrac{z+w}{2\alpha}\right)}=\dfrac{z+w}{2\alpha}$ から　$\dfrac{\overline{z}+\overline{w}}{2\overline{\alpha}}=\dfrac{z+w}{2\alpha}$

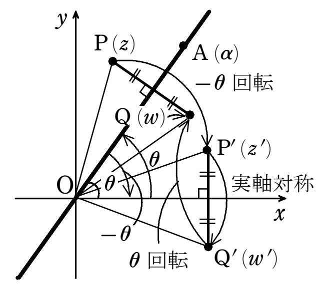
よって　$\alpha(\overline{z}+\overline{w})=\overline{\alpha}(z+w)$　　ゆえに　$\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}w-\alpha\overline{w}=0$　…… ②

①－② から　$2\alpha\overline{z}-2\overline{\alpha}w=0$　すなわち　$\overline{\alpha}w=\alpha\overline{z}$

参考　点 z と点 $\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}}\overline{z}$ は，原点と点 $\alpha\,(\alpha\neq0)$ を通る直線に関して互いに対称であることがわかる。

別解　α の偏角を θ とすると

$\alpha=|\alpha|(\cos\theta+i\sin\theta)$　…… ③



右の図のように，原点を中心とする $-\theta$ の回転により P(z) が P$'(z')$ に，実軸に関する対称移動により P$'(z')$ が Q$'(w')$ にそれぞれ移るとすると，原点を中心とする θ の回転により Q$'(w')$ が Q(w) に移るから

$z'=\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}z=(\cos\theta-i\sin\theta)z$

$w'=\overline{z'}=\overline{(\cos\theta-i\sin\theta)z}=(\cos\theta+i\sin\theta)\overline{z}$

$w=(\cos\theta+i\sin\theta)w'=(\cos\theta+i\sin\theta)^2\overline{z}$

$w=(\cos\theta+i\sin\theta)^2\overline{z}$ の両辺に $|\alpha|^2$ を掛けると，③ から

$|\alpha|^2w=\alpha^2\overline{z}$　すなわち　$\alpha\overline{\alpha}w=\alpha^2\overline{z}$

$\alpha\neq0$ であるから，両辺を α で割って　$\overline{\alpha}w=\alpha\overline{z}$

$\boxed{10}$ 3 点 A(-1)，B(1)，C$(\sqrt{3}\,i)$ を頂点とする △ABC が正三角形であることを用いて，3 点 P(α)，Q(β)，R(γ) を頂点とする △PQR が正三角形であるとき，等式 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$ が成り立つことを証明せよ。

解答 略

解説

[1] △ABC∽△PQR のとき

$\dfrac{\sqrt{3}\,i-(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$　すなわち　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

よって　$2(\gamma-\alpha)=(1+\sqrt{3}\,i)(\beta-\alpha)$

ゆえに　$2(\gamma-\alpha)-(\beta-\alpha)=\sqrt{3}(\beta-\alpha)i$

両辺を平方すると　$4(\gamma-\alpha)^2-4(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=-3(\beta-\alpha)^2$　…… [A]

よって　$(\gamma-\alpha)^2-(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0$　…… ①

展開して整理すると　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$　…… ②

[2] △ABC∽△PRQ のとき

$\dfrac{\sqrt{3}\,i-(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$　すなわち　$\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

これから　$2(\beta-\alpha)-(\gamma-\alpha)=\sqrt{3}(\gamma-\alpha)i$

両辺を平方すると　$4(\beta-\alpha)^2-4(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)+(\gamma-\alpha)^2=-3(\gamma-\alpha)^2$

これは ① と同値であり，② が導かれる。

[1], [2] から，題意は示された。

別解　相似を利用しない解法

点 Q を，点 P を中心として $\pm\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点が R であるから

$$\gamma=\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}(\beta-\alpha)+\alpha \quad \text{(複号同順)}$$

よって　$\gamma-\alpha=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}(\beta-\alpha)$　　ゆえに　$2(\gamma-\alpha)-(\beta-\alpha)=\pm\sqrt{3}(\beta-\alpha)i$

両辺を平方すると [A] が成り立つから，① が導かれる。

11 (1)　4 点 A (α)，B (β)，C (γ)，D (δ) を頂点とする四角形 ABCD について，次のことを証明せよ。

$$\text{四角形 ABCD が円に内接する} \iff \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\div\frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}>0$$

(2)　4 点 A $(7+i)$，B $(1+i)$，C $(-6i)$，D (8) を頂点とする四角形 ABCD は，円に内接することを示せ。

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　四角形 ABCD が円に内接する

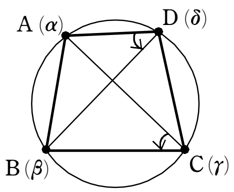
$\iff \angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{ADB}$

$\iff \arg\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\arg\frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}$

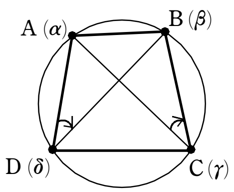
$\iff \arg\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}-\arg\frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}=0$

$\iff \arg\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\div\frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}\right)=0$

$\iff \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\div\frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}>0$



頂点は反時計回り



頂点は時計回り

したがって，題意は示された。

(2)　$\alpha=7+i$，$\beta=1+i$，$\gamma=-6i$，$\delta=8$ とすると

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\div\frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}=\frac{(1+i)-(-6i)}{(7+i)-(-6i)}\div\frac{(1+i)-8}{(7+i)-8}=\frac{1+7i}{7+7i}\cdot\frac{-1+i}{-7+i}$$

$$=\frac{-8-6i}{-56-42i}=\frac{-2(4+3i)}{-14(4+3i)}=\frac{1}{7}>0$$

したがって，(1) から，四角形 ABCD は円に内接する。

12 $a>0$ とする。複素数平面上で，等式 $|z-ia|=\frac{z-\overline{z}}{2i}$ を満たす点 z 全体の表す図形を C とする。

(1)　$z=x+iy$ と表すとき，C の方程式を $y=f(x)$ の形で表せ。

(2)　C 上の点 z で $|z-(2+2i)|=|z+(2+2i)|$ を満たすものを求めよ。

解答　(1)　$y=\frac{x^2}{2a}+\frac{a}{2}$　　(2)　$-a+ai$

解説

(1)　$z=x+iy$ のとき　$\frac{z-\overline{z}}{2i}=\frac{x+iy-(x-iy)}{2i}=y$

よって，等式は　$|z-ia|=y$

両辺を平方すると　$|z-ia|^2=y^2$　すなわち　$|x+(y-a)i|^2=y^2$

ゆえに　$x^2+(y-a)^2=y^2$

y について解くと，$a>0$ から　$y=\frac{x^2}{2a}+\frac{a}{2}$

ゆえに，図形 C の方程式は　$y=\frac{x^2}{2a}+\frac{a}{2}$

(2)　$|z-(2+2i)|=|z+(2+2i)|$ を満たす点 z 全体の集合は，2 点 $2+2i$ と $-2-2i$ を結ぶ線分の垂直二等分線を表す。

xy 平面におけるこの直線の方程式は $y=-x$ であるから，求める点は直線 $y=-x$ と放物線 C の交点である。

$-x=\frac{x^2}{2a}+\frac{a}{2}$ とすると　$x^2+2ax+a^2=0$

よって，$(x+a)^2=0$ から　$x=-a$　　このとき　$y=a$

したがって，求める点 z は　点 $-a+ai$