数学演習（複素数と図形）Ｒ２．２．１　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 3点 A$(-1+4i)$，B$(2-i)$，C$(4+3i)$ について，次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を 3 : 2 に内分する点 P
(2) 線分 AC を 2 : 1 に外分する点 Q
(3) 線分 AC の中点 M
(4) 平行四辺形 ABCD の頂点 D
(5) △ABC の重心 G

$\boxed{2}$ 次の方程式を満たす点 z の全体は，どのような図形か。

(1) $|z-2i|=|z+3|$
(2) $2|z-1+2i|=1$
(3) $(2z+1+i)(2\overline{z}+1-i)=4$
(4) $2z+2\overline{z}=1$
(5) $(1+2i)z-(1-2i)\overline{z}=4i$

$\boxed{3}$ 次の方程式を満たす点 z の全体は，どのような図形か。

(1) $3|z|=|z-8|$
(2) $2|z+4i|=3|z-i|$

$\boxed{4}$ 点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，$w=(1-i)z-2i$ で表される点 w はどのような図形を描くか。

$\boxed{5}$ 点 $\mathrm{P}(z)$ が点 $-\dfrac{1}{2}$ を通り実軸に垂直な直線上を動くとき，$w=\dfrac{1}{z}$ で表される点 $\mathrm{Q}(w)$ はどのような図形を描くか。

$\boxed{6}$ 複素数平面上の点 z $\left(z \neq \dfrac{i}{2}\right)$ に対して，$w=\dfrac{z-2i}{2z-i}$ とする。点 z が次の図形上を動くとき，点 w が描く図形を求めよ。

(1)　点 i を中心とする半径 2 の円　　(2)　虚軸

$\boxed{7}$ 点 z が原点を中心とする半径 r の円上を動き，点 w が $w=z+\dfrac{4}{z}$ を満たす。

(1)　$r=2$ のとき，点 w はどのような図形を描くか。

(2)　$w=x+yi$ (x，y は実数) とおく。$r=1$ のとき，点 w が描く図形の式を x，y を用いて表せ。

$\boxed{8}$ 複素数 z が $|z|\leqq 1$ を満たすとする。$w=z+2i$ で表される複素数 w について

(1)　点 w の存在範囲を複素数平面上に図示せよ。

(2)　w^2 の絶対値を r，偏角を θ とするとき，r と θ の値の範囲をそれぞれ求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$\boxed{9}$ 複素数 z の実部を $\mathrm{Re}\,z$ で表す。このとき，次の領域を複素数平面上に図示せよ。

(1)　$|z|>1$ かつ $\mathrm{Re}\,z<\dfrac{1}{2}$ を満たす点 z の領域

(2)　$w=\dfrac{1}{z}$ とする。点 z が (1) で求めた領域を動くとき，点 w が動く領域

1 3点 A$(-1+4i)$，B$(2-i)$，C$(4+3i)$ について，次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を 3：2 に内分する点 P　(2) 線分 AC を 2：1 に外分する点 Q

(3) 線分 AC の中点 M　(4) 平行四辺形 ABCD の頂点 D

(5) △ABC の重心 G

解答　(1) $\dfrac{4}{5}+i$　(2) $9+2i$　(3) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}i$　(4) $1+8i$　(5) $\dfrac{5}{3}+2i$

解説

(1) 点 P を表す複素数は　$\dfrac{2(-1+4i)+3(2-i)}{3+2}=\dfrac{4+5i}{5}=\dfrac{4}{5}+i$

(2) 点 Q を表す複素数は　$\dfrac{-1\cdot(-1+4i)+2(4+3i)}{2-1}=9+2i$

(3) 点 M を表す複素数は　$\dfrac{(-1+4i)+(4+3i)}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}i$

(4) 点 D(α) とすると，線分 AC の中点 M と線分 BD の中点が一致するから

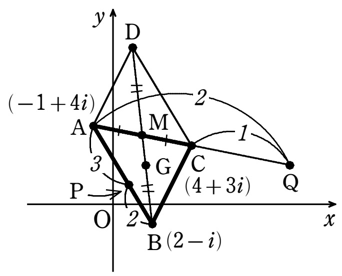
$\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}i=\dfrac{(2-i)+\alpha}{2}$

ゆえに　$3+7i=2-i+\alpha$

よって　$\alpha=1+8i$

(5) 点 G を表す複素数は

$\dfrac{(-1+4i)+(2-i)+(4+3i)}{3}=\dfrac{5+6i}{3}=\dfrac{5}{3}+2i$



2 次の方程式を満たす点 z の全体は，どのような図形か。

(1) $|z-2i|=|z+3|$　(2) $2|z-1+2i|=1$

(3) $(2z+1+i)(2\overline{z}+1-i)=4$　(4) $2z+2\overline{z}=1$

(5) $(1+2i)z-(1-2i)\overline{z}=4i$

解答　(1) 2点 $2i$，-3 を結ぶ線分の垂直二等分線

(2) 点 $1-2i$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円

(3) 点 $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ を中心とする半径 1 の円

(4) 点 $\dfrac{1}{4}$ を通り，実軸に垂直な直線　(5) 2点 1，$2i$ を通る直線

解説

(1) 方程式を変形すると　$|z-2i|=|z-(-3)|$

よって，点 z の全体は，2点 $2i$，-3 を結ぶ線分の垂直二等分線である。

(2) 方程式を変形すると　$|z-(1-2i)|=\dfrac{1}{2}$

よって，点 z の全体は，点 $1-2i$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円である。

(3) 方程式から　$(2z+1+i)\overline{(2z+1+i)}=4$　よって　$|2z+1+i|^2=4$

ゆえに　$|2z+1+i|=2$　したがって　$\left|z-\left(-\dfrac{1+i}{2}\right)\right|=1$

よって，点 z の全体は，点 $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ を中心とする半径 1 の円である。

(4) $z=x+yi$（x，y は実数）とおくと　$\overline{z}=x-yi$

これらを方程式に代入して　$2(x+yi)+2(x-yi)=1$

よって，$4x=1$ から　$x=\dfrac{1}{4}$　ゆえに　$z=\dfrac{1}{4}+yi$

z の実部は常に $\dfrac{1}{4}$ であるから，点 z の全体は，点 $\dfrac{1}{4}$ を通り，実軸に垂直な直線である。

別解　$2z+2\overline{z}=1$ から　$\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\dfrac{1}{4}$

よって，z の実部は $\dfrac{1}{4}$ であるから，点 $\dfrac{1}{4}$ を通り，実軸に垂直な直線である。

(5) $z=x+yi$（x，y は実数）とおくと　$\overline{z}=x-yi$

これらを方程式に代入して　$(1+2i)(x+yi)-(1-2i)(x-yi)=4i$

よって　$(4x+2y)i=4i$　ゆえに　$2x+y=2$　すなわち　$y=-2x+2$

座標平面上の直線 $y=-2x+2$ は2点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 2)$ を通るから，点 z の全体は，2点 1，$2i$ を通る直線である。

3 次の方程式を満たす点 z の全体は，どのような図形か。

(1) $3|z|=|z-8|$　(2) $2|z+4i|=3|z-i|$

解答　(1) 点 -1 を中心とする半径 3 の円　(2) 点 $5i$ を中心とする半径 6 の円

解説

(1) 方程式の両辺を平方すると　$9|z|^2=|z-8|^2$

ゆえに　$9z\overline{z}=(z-8)\overline{(z-8)}$　よって　$9z\overline{z}=(z-8)(\overline{z}-8)$

両辺を展開して整理すると　$z\overline{z}+z+\overline{z}=8$

ゆえに　$(z+1)(\overline{z}+1)-1=8$　よって　$(z+1)\overline{(z+1)}=9$

すなわち　$|z+1|^2=3^2$　よって　$|z+1|=3$

ゆえに，点 z の全体は，点 -1 を中心とする半径 3 の円である。

別解 1.　A(0)，B(8)，P(z) とすると，方程式は　$3\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$

ゆえに　AP：BP＝1：3

線分 AB を 1：3 に内分する点を C(α)，外分する点を D(β) とすると

$\alpha=\dfrac{3\cdot0+1\cdot8}{1+3}=2$，$\beta=\dfrac{-3\cdot0+1\cdot8}{1-3}=-4$

よって，点 z の全体は，2点 2，-4 を直径の両端とする円。

別解 2.　$z=x+yi$（x，y は実数）とおくと，$9|z|^2=|z-8|^2$ から

$9(x^2+y^2)=(x-8)^2+y^2$

展開して整理すると　$x^2+2x+y^2-8=0$　変形すると　$(x+1)^2+y^2=3^2$

よって，点 z の全体は，点 -1 を中心とする半径 3 の円。

(2) 方程式の両辺を平方すると　$4|z+4i|^2=9|z-i|^2$

ゆえに　$4(z+4i)\overline{(z+4i)}=9(z-i)\overline{(z-i)}$

よって　$4(z+4i)(\overline{z}-4i)=9(z-i)(\overline{z}+i)$

両辺を展開して整理すると　$z\overline{z}+5iz-5i\overline{z}=11$

ゆえに　$(z-5i)(\overline{z}+5i)-25=11$　よって　$(z-5i)\overline{(z-5i)}=36$

すなわち　$|z-5i|^2=6^2$　よって　$|z-5i|=6$

ゆえに，点 z の全体は，点 $5i$ を中心とする半径 6 の円である。

別解 1.　A$(-4i)$，B(i)，P(z) とすると，方程式は　$2\mathrm{AP}=3\mathrm{BP}$

ゆえに　AP：BP＝3：2

線分 AB を 3：2 に内分する点を C(α)，外分する点を D(β) とすると

$\alpha=\dfrac{2\cdot(-4i)+3\cdot i}{3+2}=-i$，$\beta=\dfrac{-2\cdot(-4i)+3\cdot i}{3-2}=11i$

よって，点 z の全体は，2点 $-i$，$11i$ を直径の両端とする円。

別解 2.　$z=x+yi$（x，y は実数）とおくと，$4|z+4i|^2=9|z-i|^2$ から

$4\{x^2+(y+4)^2\}=9\{x^2+(y-1)^2\}$

展開して整理すると　$x^2+y^2-10y-11=0$　変形すると　$x^2+(y-5)^2=6^2$

よって，点 z の全体は，点 $5i$ を中心とする半径 6 の円。

4 点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，$w=(1-i)z-2i$ で表される点 w はどのような図形を描くか。

解答　点 $-2i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円

解説

点 z は単位円上を動くから　$|z|=1$　……①

$w=(1-i)z-2i$ から　$z=\dfrac{w+2i}{1-i}$

これを①に代入すると　$\left|\dfrac{w+2i}{1-i}\right|=1$　すなわち　$\dfrac{|w+2i|}{|1-i|}=1$

$|1-i|=\sqrt{2}$ であるから　$|w+2i|=\sqrt{2}$

よって，点 w は点 $-2i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を描く。

参考　$w=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}z-2i$ であるから，求める図形は，円 $|z|=1$ を，次の（ア），（イ），（ウ）の順に回転・拡大・平行移動したものである。

（ア） 原点を中心として $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転　⟶ 円 $|z|=1$ のまま。

（イ） 原点を中心として $\sqrt{2}$ 倍に拡大　⟶ 円 $|z|=\sqrt{2}$ に移る。

（ウ） 虚軸方向に -2 だけ平行移動　⟶ 円 $|z+2i|=\sqrt{2}$ に移る。

5 点 P(z) が点 $-\dfrac{1}{2}$ を通り実軸に垂直な直線上を動くとき，$w=\dfrac{1}{z}$ で表される点 Q(w) はどのような図形を描くか。

解答　点 -1 を中心とする半径 1 の円。ただし，原点を除く

解説

点 P(z) は原点と点 -1 を結ぶ線分の垂直二等分線上を動くから

$|z|=|z+1|$　……①

$w=\dfrac{1}{z}$ から　$wz=1$　$w=0$ とすると $0=1$ となり，不合理。

よって，$w\neq0$ であるから　$z=\dfrac{1}{w}$

これを①に代入すると　$\left|\dfrac{1}{w}\right|=\left|\dfrac{1}{w}+1\right|$

両辺に $|w|$ を掛けて　$1=|1+w|$　すなわち　$|w+1|=1$

ゆえに，点 Q(w) は点 -1 を中心とする半径 1 の円を描く。

ただし，$w\neq0$ であるから，原点を除く。

別解　z の実部は $-\dfrac{1}{2}$ であるから　$\dfrac{z+\overline{z}}{2}=-\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$z+\overline{z}=-1$　……②

$z=\dfrac{1}{w}$ を代入して　$\dfrac{1}{w}+\dfrac{1}{\overline{w}}=-1$　よって　$w\overline{w}+w+\overline{w}=0$

ゆえに　$|w+1|=1$

よって，点 -1 を中心とする半径 1 の円。原点を除く。

6 複素数平面上の点 z $\left(z\neq\dfrac{i}{2}\right)$ に対して，$w=\dfrac{z-2i}{2z-i}$ とする。点 z が次の図形上を動くとき，点 w が描く図形を求めよ。

(1) 点 i を中心とする半径 2 の円　　(2) 虚軸

解答 (1) 点 $\dfrac{3}{5}$ を中心とする半径 $\dfrac{2}{5}$ の円　(2) 実軸。ただし，点 $\dfrac{1}{2}$ を除く

解説

$w=\dfrac{z-2i}{2z-i}$ から　$w(2z-i)=z-2i$　　よって　$(2w-1)z=(w-2)i$

ここで，$w=\dfrac{1}{2}$ とすると，$0=-\dfrac{3}{2}i$ となり，不合理である。

ゆえに　$w\neq\dfrac{1}{2}$　　よって　$z=\dfrac{w-2}{2w-1}i$　…… ①

(1) ① を $|z-i|=2$ に代入すると　$\left|\dfrac{w-2}{2w-1}i-i\right|=2$

よって　$\left|\left(\dfrac{w-2}{2w-1}-1\right)i\right|=2$　　ゆえに　$\left|\dfrac{-w-1}{2w-1}\right||i|=2$

よって　$\dfrac{|w+1|}{|2w-1|}=2$　　ゆえに　$|w+1|=2|2w-1|$

すなわち　$|w+1|=4\left|w-\dfrac{1}{2}\right|$

A (-1)，B $\left(\dfrac{1}{2}\right)$，P (w) とすると　AP$=$4BP

すなわち，AP : BP$=$4 : 1 であるから，点 P の描く図形は，線分 AB を 4 : 1 に内分する点 C と外分する点 D を直径の両端とする円である。

C $\left(\dfrac{1}{5}\right)$，D (1) であるから，点 w が描く図形は　点 $\dfrac{3}{5}$ を中心とする半径 $\dfrac{2}{5}$ の円

別解 $|w+1|=2|2w-1|$ を導くまでは同じ。この等式の両辺を平方すると

$4|2w-1|^2=|w+1|^2$

ゆえに　$4(2w-1)\overline{(2w-1)}=(w+1)\overline{(w+1)}$

よって　$4(2w-1)(2\overline{w}-1)=(w+1)(\overline{w}+1)$

展開して整理すると　$5w\overline{w}-3w-3\overline{w}+1=0$

ゆえに　$w\overline{w}-\dfrac{3}{5}w-\dfrac{3}{5}\overline{w}+\dfrac{1}{5}=0$

よって　$\left(w-\dfrac{3}{5}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{3}{5}\right)-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}=0$

ゆえに　$\left(w-\dfrac{3}{5}\right)\overline{\left(w-\dfrac{3}{5}\right)}=\dfrac{4}{25}$

すなわち　$\left|w-\dfrac{3}{5}\right|^2=\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$　　よって　$\left|w-\dfrac{3}{5}\right|=\dfrac{2}{5}$

したがって，点 w が描く図形は　点 $\dfrac{3}{5}$ を中心とする半径 $\dfrac{2}{5}$ の円

(2) 点 z が虚軸上を動くとき　$z+\overline{z}=0$

① を代入して　$\dfrac{w-2}{2w-1}i+\overline{\dfrac{w-2}{2w-1}i}=0$

ゆえに　$\dfrac{w-2}{2w-1}i+\dfrac{\overline{w}-2}{2\overline{w}-1}(-i)=0$

よって　$(w-2)(2\overline{w}-1)-(\overline{w}-2)(2w-1)=0$

展開して整理すると　$w-\overline{w}=0$　すなわち　$w=\overline{w}$

したがって，点 w が描く図形は　実軸。ただし，点 $\dfrac{1}{2}$ を除く。

別解 $z=ki$ $\left(k\text{ は実数，}k\neq\dfrac{1}{2}\right)$ として $w=\dfrac{z-2i}{2z-i}$ に代入すると

$w=\dfrac{k-2}{2k-1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4k-2}$　　この k の関数の値域に注目。

7 点 z が原点を中心とする半径 r の円上を動き，点 w が $w=z+\dfrac{4}{z}$ を満たす。

(1) $r=2$ のとき，点 w はどのような図形を描くか。

(2) $w=x+yi$ (x，y は実数) とおく。$r=1$ のとき，点 w が描く図形の式を x，y を用いて表せ。

解答 (1) 2 点 -4，4 を結ぶ線分　(2) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

解説

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とすると

$w=z+\dfrac{4}{z}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\dfrac{4}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$

$=\left(r+\dfrac{4}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\dfrac{4}{r}\right)\sin\theta$　…… ①

(1) $r=2$ のとき，① から　$w=4\cos\theta$

$0\leqq\theta<2\pi$ では $-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから　$-4\leqq w\leqq4$

したがって，点 w は 2 点 -4，4 を結ぶ線分を描く。

(2) $r=1$ のとき，① から　$w=5\cos\theta-3i\sin\theta$

$w=x+yi$ とおくと　$x=5\cos\theta$，$y=-3\sin\theta$

$\cos\theta=\dfrac{x}{5}$，$\sin\theta=-\dfrac{y}{3}$ を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して θ を消去すると

$\left(-\dfrac{y}{3}\right)^2+\left(\dfrac{x}{5}\right)^2=1$　すなわち　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

8 複素数 z が $|z|\leqq1$ を満たすとする。$w=z+2i$ で表される複素数 w について

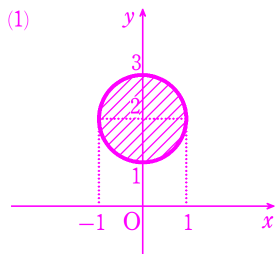
(1) 点 w の存在範囲を複素数平面上に図示せよ。

(2) w^2 の絶対値を r，偏角を θ とするとき，r と θ の値の範囲をそれぞれ求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

解答 (1) [図] 境界線を含む

(2) $1\leqq r\leqq9$，$\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{4}{3}\pi$

(1)



解説

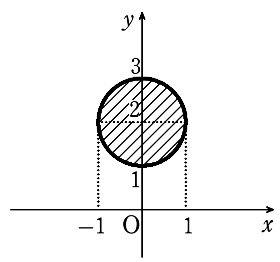
(1) $w=z+2i$ から　$z=w-2i$

これを $|z|\leqq1$ に代入して　$|w-2i|\leqq1$

ゆえに，点 w の全体は，点 $2i$ を中心とする半径 1 の円の周および内部である。

よって，点 w の存在範囲は右図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



(2) $w=R(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ $[R>0]$ とすると

$w^2=R^2(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2=R^2(\cos2\alpha+i\sin2\alpha)$

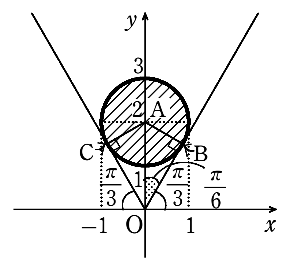
よって，条件から　$r=R^2$，$\theta=2\alpha$

(1) の図から　$|i|\leqq|w|\leqq|3i|$　　ゆえに　$1^2\leqq R^2\leqq3^2$

したがって　$1\leqq r\leqq9$

また，右図において

OA$=2$，AB$=1$，$\angle$ABO$=\dfrac{\pi}{2}$



よって　$\angle$AOB$=\dfrac{\pi}{6}$

同様にして　$\angle$AOC$=\dfrac{\pi}{6}$

ゆえに　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\alpha\leqq\dfrac{2}{3}\pi$　　よって　$\dfrac{2}{3}\pi\leqq2\alpha\leqq\dfrac{4}{3}\pi$

ゆえに　$\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{4}{3}\pi$　　これは $0\leqq\theta<2\pi$ を満たす。

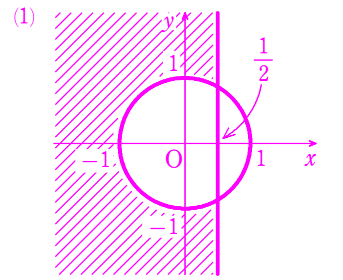
9 複素数 z の実部を Re z で表す。このとき，次の領域を複素数平面上に図示せよ。

(1) $|z|>1$ かつ Re $z<\dfrac{1}{2}$ を満たす点 z の領域

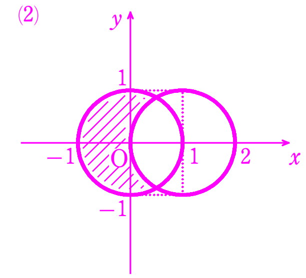
(2) $w=\dfrac{1}{z}$ とする。点 z が (1) で求めた領域を動くとき，点 w が動く領域

解答 (1) [図] 境界線を含まない　(2) [図] 境界線を含まない

(1)



(2)



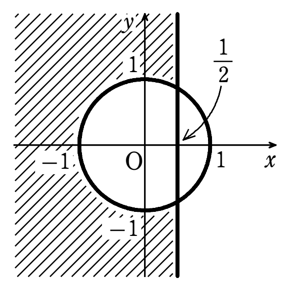
解説

(1) $|z|>1$ の表す領域は，原点を中心とする半径 1 の円の外部である。

また，Re $z<\dfrac{1}{2}$ の表す領域は，点 $\dfrac{1}{2}$ を通り実軸に垂直な直線 ℓ の左側である。

よって，求める領域は右図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含まない。



(2) $w=\dfrac{1}{z}$ から，$w\neq0$ で　$z=\dfrac{1}{w}$

直線 ℓ は 2 点 O (0)，A (1) を結ぶ線分の垂直二等分線であり，直線 ℓ の左側の部分にある点を P (z) とすると，OP<AP すなわち $|z|<|z-1|$ が成り立つ。

よって，(1) で求めた領域は，$|z|>1$ かつ $|z|<|z-1|$ と表される。

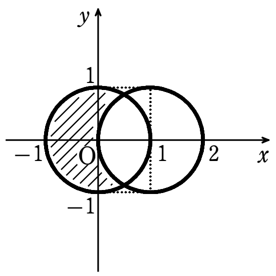
$z=\dfrac{1}{w}$ を $|z|>1$ に代入すると　$\left|\dfrac{1}{w}\right|>1$

ゆえに　$|w|<1$　…… ①

$z=\dfrac{1}{w}$ を $|z|<|z-1|$ に代入すると　$\left|\dfrac{1}{w}\right|<\left|\dfrac{1}{w}-1\right|$

よって　$\dfrac{1}{|w|}<\dfrac{|1-w|}{|w|}$

ゆえに　$|w-1|>1$　…… ②



よって，求める領域は ①，② それぞれが表す領域の共通部分で，右図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含まない。

参考　② は次のように導くこともできる。

$\mathrm{Re}\,z<\dfrac{1}{2}$ から　$\dfrac{z+\overline{z}}{2}<\dfrac{1}{2}$　すなわち　$z+\overline{z}<1$

よって　$\dfrac{1}{w}+\dfrac{1}{\overline{w}}<1$　　ゆえに　$\overline{w}+w<w\overline{w}$

よって　$w\overline{w}-w-\overline{w}>0$　　これから　$|w-1|>1$

別解　(1)　$z=x+yi$ (x，y は実数) とすると

$|z|^2>1^2$ から　$x^2+y^2>1$　…… ①　　$\mathrm{Re}\,z<\dfrac{1}{2}$ から　$x<\dfrac{1}{2}$　…… ②

①，② それぞれが表す領域の共通部分を図示する。

(2)　$w=x+yi$ (x，y は実数) とする。

$w=\dfrac{1}{z}$ から，$w\neq 0$ で　$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

このとき　$z=\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{x+yi}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$

$|z|^2>1^2$ から　$\dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}>1$　　ゆえに　$x^2+y^2<1$　…… ③

$\mathrm{Re}\,z<\dfrac{1}{2}$ から　$z+\overline{z}<1$

よって　$\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}+\dfrac{x+yi}{x^2+y^2}<1$　すなわち　$\dfrac{2x}{x^2+y^2}<1$

ゆえに　$x^2+y^2>2x$　すなわち　$(x-1)^2+y^2>1$　…… ④

③，④ それぞれが表す領域の共通部分を図示する。