数学演習（ド•モアブルの定理）R２．１．３１

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の式を計算せよ。

(1) $\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^9$　　(2) $(1+\sqrt{3}\,i)^6$　　(3) $\dfrac{1}{(1-i)^{10}}$

$\boxed{2}$ (1) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^n$ が実数となる最小の自然数 n の値を求めよ。

(2) 複素数 z が $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ を満たすとき，$z^{20}+\dfrac{1}{z^{20}}$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 極形式を用いて，方程式 $z^6=1$ を解け。

$\boxed{4}$ 方程式 $z^4=-8+8\sqrt{3}\,i$ を解け。

$\boxed{5}$ 複素数 $\alpha=\cos\dfrac{2}{7}\pi+i\sin\dfrac{2}{7}\pi$ に対して

(1) （ア） $\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6$　　（イ） $\dfrac{1}{1-\alpha}+\dfrac{1}{1-\alpha^6}$

（ウ） $(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5)(1-\alpha^6)$　　の値を求めよ。

(2) $t=\alpha+\overline{\alpha}$ とするとき，t^3+t^2-2t の値を求めよ。

$\boxed{6}$ $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$，$\beta=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，$\gamma=-\alpha$ とするとき

(1)　$\alpha^n=\gamma$ となるような最小の自然数 n の値を求めよ。

(2)　$\alpha^n\beta^m=\gamma$ となるような自然数の組 $(n,\ m)$ のうちで，$n+m$ が最小となるものを求めよ。

$\boxed{7}$ (1)　$\dfrac{1+z}{1-z}=\cos\theta+i\sin\theta$ が成り立つとき，$z=i\tan\dfrac{\theta}{2}$ と表されることを示せ。

(2)　方程式 $(z+1)^7+(z-1)^7=0$ を解け。

$\boxed{8}$ 次の式を計算せよ。

$\dfrac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}=$ ア $\boxed{}$，$\left(\dfrac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}\right)^3=$ イ $\boxed{}$，$\left(\dfrac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}\right)^{2020}=$ ウ $\boxed{}$

$\boxed{9}$ z についての 2 次方程式 $z^2-2z\cos\theta+1=0$ (ただし，$0<\theta<\pi$) の複素数解を α，β とする。

(1)　α，β を求めよ。

(2)　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\alpha^n+\beta^n$ の値を求めよ。ただし，n は正の整数とする。

$\boxed{10}$ 絶対値が 1 で偏角が θ の複素数を z とし，n を正の整数とする。

(1)　$|1-z^2|$ を θ で表せ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^{2k}$ を考えることにより，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta$ を計算せよ。

1 次の式を計算せよ。

(1) $\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^9$　　(2) $(1+\sqrt{3}\,i)^6$　　(3) $\frac{1}{(1-i)^{10}}$

解答　(1) $-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$　　(2) 64　　(3) $\frac{1}{32}i$

解説

(1) $\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^9=\cos\left(9\times\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(9\times\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

(2) $1+\sqrt{3}\,i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

よって　$(1+\sqrt{3}\,i)^6=\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^6$

$$=2^6\left\{\cos\left(6\times\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(6\times\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=2^6(\cos2\pi+i\sin2\pi)=2^6\cdot1=64$$

(3) $1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

よって　$\frac{1}{(1-i)^{10}}=(1-i)^{-10}$

$$=(\sqrt{2})^{-10}\left[\cos\left\{(-10)\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}+i\sin\left\{(-10)\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\right]$$

$$=2^{-5}\left(\cos\frac{5}{2}\pi+i\sin\frac{5}{2}\pi\right)=2^{-5}\cdot i=\frac{1}{32}i$$

2 (1) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^n$ が実数となる最小の自然数 n の値を求めよ。

(2) 複素数 z が $z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$ を満たすとき，$z^{20}+\frac{1}{z^{20}}$ の値を求めよ。

解答　(1) $n=12$　　(2) -2

解説

(1) $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

よって　$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\frac{n}{12}\pi+i\sin\frac{n}{12}\pi\right)$　……①

① が実数となるための条件は　$\sin\frac{n}{12}\pi=0$

ゆえに　$\frac{n}{12}\pi=k\pi$（k は整数）　よって　$n=12k$

ゆえに，求める最小の自然数 n は $k=1$ のときで　$n=12$

(2) $z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$ の両辺に z を掛けて整理すると　$z^2-\sqrt{2}\,z+1=0$

これを解くと　$z=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{(\sqrt{2})^2-4\cdot1\cdot1}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}$

よって　$z=\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$（複号同順）

ここで，$\theta=\pm\frac{\pi}{4}$ とおくと

$$z^{20}+\frac{1}{z^{20}}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{20}+(\cos\theta+i\sin\theta)^{-20}$$

$$=(\cos20\theta+i\sin20\theta)+\{\cos(-20\theta)+i\sin(-20\theta)\}$$

$$=2\cos20\theta=2\cos\left\{20\times\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right\}=2\cos(\pm5\pi)=2\cos5\pi=-2$$

3 極形式を用いて，方程式 $z^6=1$ を解け。

解答　$z=\pm1,\ \pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

解説

解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $[r>0]$ とすると

$z^6=r^6(\cos6\theta+i\sin6\theta)$

また　$1=\cos0+i\sin0$

ゆえに　$r^6(\cos6\theta+i\sin6\theta)=\cos0+i\sin0$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$r^6=1,\quad 6\theta=2k\pi$（$k$ は整数）

$r>0$ であるから　$r=1$　　また　$\theta=\frac{k}{3}\pi$

よって　$z=\cos\frac{k}{3}\pi+i\sin\frac{k}{3}\pi$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると　$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

① で $k=l$（$l=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$）としたときの z を z_l とすると

$z_0=\cos0+i\sin0=1,$

$z_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$

$z_2=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$

$z_3=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$

$z_4=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$

$z_5=\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

したがって，求める解は　$z=\pm1,\ \pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

4 方程式 $z^4=-8+8\sqrt{3}\,i$ を解け。

解答　$z=\pm(\sqrt{3}+i),\ \pm(1-\sqrt{3}\,i)$

解説

解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $[r>0]$ とすると

$z^4=r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)$

また　$-8+8\sqrt{3}\,i=16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

ゆえに　$r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$r^4=16,\quad 4\theta=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$（$k$ は整数）

$r>0$ であるから　$r=2$　　また　$\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{k}{2}\pi$

よって　$z=2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k}{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k}{2}\pi\right)\right\}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると　$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$

① で $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ としたときの z を，それぞれ $z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3$ とすると

$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i,$

$z_1=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=-1+\sqrt{3}\,i,$

$z_2=2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)=-\sqrt{3}-i,$

$z_3=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=1-\sqrt{3}\,i$

したがって，求める解は　$z=\pm(\sqrt{3}+i),\ \pm(1-\sqrt{3}\,i)$

5 複素数 $\alpha=\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi$ に対して

(1)（ア）$\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6$　（イ）$\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\alpha^6}$

（ウ）$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5)(1-\alpha^6)$　の値を求めよ。

(2) $t=\alpha+\overline{\alpha}$ とするとき，t^3+t^2-2t の値を求めよ。

解答　(1)（ア）-1　（イ）1　（ウ）7　(2) 1

解説

(1)（ア）$\alpha^7=\left(\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi\right)^7=\cos2\pi+i\sin2\pi=1$

ゆえに　$\alpha^7-1=0$

よって　$(\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\neq1$ であるから　$\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$　……①

したがって　$\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=-1$

（イ）$\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\alpha^6}=\frac{1}{1-\alpha}+\frac{\alpha}{\alpha-\alpha^7}=\frac{1}{1-\alpha}+\frac{\alpha}{\alpha-1}=\frac{1-\alpha}{1-\alpha}=1$

（ウ）$\alpha^7=1$ であるから，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 7$ に対して $(\alpha^k)^7=(\alpha^7)^k=1^k=1$ が成り立つ。よって，α^k（$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 7$）は方程式 $z^7=1$ の解である。

ここで，$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \alpha^6,\ \alpha^7\,(=1)$ は互いに異なるから，7 次方程式 $z^7-1=0$ の異なる 7 個の解である。

ゆえに，$z^7-1=(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)(z-\alpha^4)(z-\alpha^5)(z-\alpha^6)(z-\alpha^7)$

すなわち $z^7-1=(z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)(z-\alpha^4)(z-\alpha^5)(z-\alpha^6)$

と因数分解できる。

$z^7-1=(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)$ であるから

$$(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)(z-\alpha^4)(z-\alpha^5)(z-\alpha^6)=z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$$

両辺に $z=1$ を代入して　$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5)(1-\alpha^6)=1\times7=7$

(2) $|\alpha|=1$ であるから　$\alpha\overline{\alpha}=1$　　よって　$\overline{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$　　ゆえに　$t=\alpha+\frac{1}{\alpha}$

① の両辺を $\alpha^3\,(\neq0)$ で割ると

$$\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}=0 \quad \cdots\cdots ②$$

ここで　$\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^3-3\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)=t^3-3t$，$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-2=t^2-2$

ゆえに，② から　$(t^3-3t)+(t^2-2)+t+1=0$

したがって　$t^3+t^2-2t=1$

6　$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$，$\beta=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，$\gamma=-\alpha$ とするとき

(1)　$\alpha^n=\gamma$ となるような最小の自然数 n の値を求めよ。

(2)　$\alpha^n\beta^m=\gamma$ となるような自然数の組 $(n,\ m)$ のうちで，$n+m$ が最小となるものを求めよ。

解答　(1)　$n=7$　　(2)　$(n,\ m)=(1,\ 4)$

解説

(1)　$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$，$\gamma=\cos\dfrac{7}{6}\pi+i\sin\dfrac{7}{6}\pi$ であるから，$\alpha^n=\gamma$ より

$$\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}=\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi$$

よって　$\dfrac{n\pi}{6}=\dfrac{7}{6}\pi+2k\pi$　(k は整数)　　ゆえに　$n=7+12k$

求める最小の自然数 n は，$k=0$ のときで　$n=7$

(2)　$\beta=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ であるから，$\alpha^n\beta^m=\gamma$ より

$$\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{m\pi}{4}+i\sin\frac{m\pi}{4}\right)=\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi$$

ゆえに　$\cos\left(\dfrac{n}{6}+\dfrac{m}{4}\right)\pi+i\sin\left(\dfrac{n}{6}+\dfrac{m}{4}\right)\pi=\cos\dfrac{7}{6}\pi+i\sin\dfrac{7}{6}\pi$

よって　$\left(\dfrac{n}{6}+\dfrac{m}{4}\right)\pi=\dfrac{7}{6}\pi+2k\pi$　(k は整数)

ゆえに　$2n+3m=14+24k$　…… ①

n，m は自然数であるから，① より　$k\geqq 0$　…… ②

① を変形すると　$2(n-7)=-3(m-8k)$

2 と 3 は互いに素であるから，$n-7=-3l$，$m-8k=2l$ (l は整数) と表される。

よって　$n=7-3l$，$m=2l+8k$

n は自然数であるから　$7-3l>0$　　ゆえに　$l\leqq 2$　…… ③

ここで　$n+m=(7-3l)+(2l+8k)=7+8k-l$

$n+m$ が最小となるのは，②，③ から $k=0$ かつ $l=2$ のとき，すなわち $(n,\ m)=(1,\ 4)$ のときである。

7　(1)　$\dfrac{1+z}{1-z}=\cos\theta+i\sin\theta$ が成り立つとき，$z=i\tan\dfrac{\theta}{2}$ と表されることを示せ。

(2)　方程式 $(z+1)^7+(z-1)^7=0$ を解け。

解答　(1)　略　　(2)　$z=0,\ \pm i\tan\dfrac{\pi}{7},\ \pm i\tan\dfrac{2}{7}\pi,\ \pm i\tan\dfrac{3}{7}\pi$

解説

(1)　$\dfrac{1+z}{1-z}=\cos\theta+i\sin\theta$ を z について解くと　$z=\dfrac{(\cos\theta-1)+i\sin\theta}{(\cos\theta+1)+i\sin\theta}$

ここで　$(\cos\theta-1)+i\sin\theta=-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}+i\cdot 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$$=2i\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$(\cos\theta+1)+i\sin\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}+i\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

したがって　$z=\dfrac{i\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}=i\tan\dfrac{\theta}{2}$

(2)　$(z+1)^7+(z-1)^7=0$ から　$(1+z)^7=(1-z)^7$

$z=1$ は解ではないから　$\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^7=1$

ゆえに　$\dfrac{1+z}{1-z}=\cos\dfrac{2k\pi}{7}+i\sin\dfrac{2k\pi}{7}$　$(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 6)$

よって，(1) から　$z=i\tan\dfrac{k\pi}{7}$　$(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 6)$

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ であるから　$z=0,\ \pm i\tan\dfrac{\pi}{7},\ \pm i\tan\dfrac{2}{7}\pi,\ \pm i\tan\dfrac{3}{7}\pi$

8　次の式を計算せよ。

$\dfrac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}=$ ア $\boxed{}$，$\left(\dfrac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}\right)^3=$ イ $\boxed{}$，$\left(\dfrac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}\right)^{2020}=$ ウ $\boxed{}$

解答　(ア)　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$　　(イ)　$-i$　　(ウ)　$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

解説

(ア)　$\dfrac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}=\dfrac{(2+\sqrt{3}-i)^2}{(2+\sqrt{3}+i)(2+\sqrt{3}-i)}=\dfrac{(2+\sqrt{3})^2-2(2+\sqrt{3})i-1}{(2+\sqrt{3})^2+1}$

$$=\frac{6+4\sqrt{3}-2(2+\sqrt{3})i}{8+4\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)-2(2+\sqrt{3})i}{4(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

(イ)　$\dfrac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}=\alpha$ とおくと，(ア) から　$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

α を極形式で表すと　$\alpha=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

よって　$\alpha^3=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}^3$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i$$

(ウ)　$\alpha^{12}=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}^{12}=\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi)=1$

よって　$\alpha^{2020}=\alpha^{12\times 168+4}=(\alpha^{12})^{168}\cdot\alpha^4=\alpha^4$

$$=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^4$$

$$=\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

9　z についての 2 次方程式 $z^2-2z\cos\theta+1=0$ (ただし，$0<\theta<\pi$) の複素数解を α，β とする。

(1)　α，β を求めよ。

(2)　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\alpha^n+\beta^n$ の値を求めよ。ただし，n は正の整数とする。

解答　(1)　$(\alpha,\ \beta)=(\cos\theta\pm i\sin\theta,\ \cos\theta\mp i\sin\theta)$ (複号同順)

(2)　n が 3 の倍数のとき 2，n が 3 の倍数でないとき -1

解説

(1)　$z=-(-\cos\theta)\pm\sqrt{(-\cos\theta)^2-1\cdot 1}=\cos\theta\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}\ i$

$$=\cos\theta\pm\sqrt{\sin^2\theta}\ i=\cos\theta\pm i\sin\theta$$

よって　$(\alpha,\ \beta)=(\cos\theta\pm i\sin\theta,\ \cos\theta\mp i\sin\theta)$ (複号同順)

(2)　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき

$$\alpha^n+\beta^n=\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^n+\left(\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^n$$

$$=\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^n+\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^n$$

$$=\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}+\cos\left(-\frac{2n\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$=2\cos\frac{2n\pi}{3}$$

m を正の整数とすると

[1]　$n=3m$ のとき　$\alpha^n+\beta^n=2\cos 2m\pi=2\cdot 1=2$

[2]　$n=3m-1$ のとき

$$\alpha^n+\beta^n=2\cos\frac{2(3m-1)\pi}{3}=2\cos\left(2m\pi-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=2\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

[3]　$n=3m-2$ のとき

$$\alpha^n+\beta^n=2\cos\frac{2(3m-2)\pi}{3}=2\cos\left(2m\pi-\frac{4}{3}\pi\right)$$

$$=2\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

以上から，$\alpha^n+\beta^n$ の値は　n が 3 の倍数のとき 2，　n が 3 の倍数でないとき -1

10　絶対値が 1 で偏角が θ の複素数を z とし，n を正の整数とする。

(1)　$|1-z^2|$ を θ で表せ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^{2k}$ を考えることにより，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta$ を計算せよ。

解答　(1)　$2|\sin\theta|$

(2)　n を整数とすると，$\theta=n\pi$ のとき 0，$\theta\neq n\pi$ のとき $\dfrac{\sin n\theta\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$

解説

(1)　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ であるから

$$|1-z^2|=|1-(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)|=\sqrt{(1-\cos 2\theta)^2+\sin^2 2\theta}$$

$$=\sqrt{2-2\cos 2\theta}=\sqrt{2-2(1-2\sin^2\theta)}=\sqrt{4\sin^2\theta}$$

$$=2|\sin\theta|$$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^{2k}=\sum_{k=1}^{n}(\cos 2k\theta+i\sin 2k\theta)=\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta+i\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta$ は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^{2k}$ の虚部である。

[1]　$z=\pm 1$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^{2k}$ は実数であるから　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta=0$

[2]　$z \fallingdotseq \pm 1$ のとき，$z^2 \fallingdotseq 1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} z^{2k} = \sum_{k=1}^{n} z^2 (z^2)^{k-1} = \frac{z^2\{1-(z^2)^n\}}{1-z^2} = \frac{z^2 - z^{2n+2}}{1-z^2} = \frac{(z^2 - z^{2n+2})(\overline{1-z^2})}{(1-z^2)(\overline{1-z^2})}$$

$$= \frac{(z^2 - z^{2n+2})\{1-(\overline{z})^2\}}{|1-z^2|^2} = \frac{z^2 - |z|^4 - z^{2n+2} + |z|^4 z^{2n}}{(2|\sin\theta|)^2}$$

$$= \frac{z^2 + z^{2n} - z^{2n+2} - 1}{4\sin^2\theta}$$

ここで，$z^2 + z^{2n} - z^{2n+2} - 1$ の虚部は

$$\begin{aligned} \sin 2\theta + \sin 2n\theta - \sin(2n+2)\theta &= 2\sin(n+1)\theta \times \cos(n-1)\theta \\ &\quad - 2\sin(n+1)\theta \times \cos(n+1)\theta \\ &= 2\sin(n+1)\theta\{\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta\} \\ &= 2\sin(n+1)\theta\{-2\sin n\theta \sin(-\theta)\} \\ &= 4\sin\theta \sin n\theta \sin(n+1)\theta \end{aligned}$$

であるから　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin 2k\theta = \frac{4\sin\theta\sin n\theta\sin(n+1)\theta}{4\sin^2\theta} = \frac{\sin n\theta \sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$

[1]，[2] から，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin 2k\theta$ の値は，n を整数とすると

$\theta = n\pi$ のとき 0，　$\theta \fallingdotseq n\pi$ のとき $\dfrac{\sin n\theta \sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$