数学演習（極形式）Ｒ２．１．３０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　$-1+\sqrt{3}\,i$　　(2)　$-2i$　　(3)　$z=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$ のとき　$2\overline{z}$

$\boxed{2}$ 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　$2-2i$　　(2)　-3　　(3)　$\cos\dfrac{2}{3}\pi-i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$\boxed{3}$ $\alpha=2+2i$，$\beta=1-\sqrt{3}\,i$ のとき，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$\boxed{4}$ $1+\sqrt{3}\,i$，$1+i$ を極形式で表すことにより，$\cos\dfrac{\pi}{12}$，$\sin\dfrac{\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。

$\boxed{5}$ (1)　$\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ とするとき，$\alpha+i$ の偏角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ を求めよ。

(2)　$\alpha+i$ の絶対値に注目することにより，$\cos\dfrac{\pi}{8}$ の値を求めよ。

$\boxed{6}$ (1)　$z=2+4i$ とする。点 z を，原点を中心として $-\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(2)　次の複素数で表される点は，点 z をどのように移動した点であるか。

（ア）　$\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}z$　　（イ）　$\dfrac{z}{1-\sqrt{3}\,i}$　　（ウ）　$-i\overline{z}$

$\boxed{7}$ 複素数平面上の3点A$(1+i)$，B$(3+4i)$，Cについて，△ABCが正三角形となるとき，点Cを表す複素数zを求めよ。

$\boxed{8}$ 複素数平面上に3点O(0)，A$(-1+3i)$，Bがある。△OABが直角二等辺三角形となるとき，点Bを表す複素数zを求めよ。

$\boxed{9}$ (1) 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角θは$0 \leqq \theta < 2\pi$とする。

(ア) $\dfrac{7-i}{-3+4i}$　　(イ) $\sin\alpha + i\cos\alpha$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2) zを虚数とする。$z+\dfrac{1}{z}$が実数となるとき，$|z|=1$であることを示せ。また，$z+\dfrac{1}{z}$が自然数となるzをすべて求めよ。

$\boxed{10}$ 複素数$z_n=\cos\dfrac{\pi}{3^n}+i\sin\dfrac{\pi}{3^n}$に対して，$\dfrac{z_2 z_4 \cdots\cdots z_{2n}}{z_1 z_3 \cdots\cdots z_{2n-1}}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ $(-\pi<\alpha\leqq\pi)$と表すとき，$\alpha=$ ${}^{ア}\boxed{}\left(1-3^{{}^{イ}\boxed{}}\right)\pi$ である。ただし，nは自然数とする。

$\boxed{11}$ 複素数平面上で，3点O(0)，A(α)，B(β)を頂点とする三角形OABが$\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$を満たすとき，${}^{ア}\boxed{}\alpha^2-{}^{イ}\boxed{}\alpha\beta+\beta^2=0$が成り立つ。

数学演習（極形式）R２．１．３０　　(　)組(　)番　名前(　　　　　　)

[1] 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $-1+\sqrt{3}\,i$　　(2) $-2i$　　(3) $z=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$ のとき　$2\bar{z}$

解答　(1) $2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$　　(2) $2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

(3) $2\left(\cos\frac{9}{5}\pi+i\sin\frac{9}{5}\pi\right)$

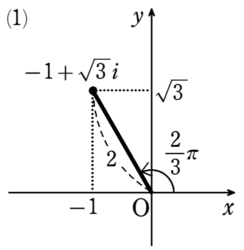
解説

(1) 絶対値は　$\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

偏角 θ は　$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{2}{3}\pi$

したがって　$-1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

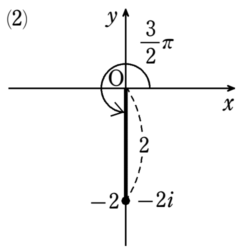


(2) 絶対値は　$\sqrt{(-2)^2}=2$

偏角 θ は　$\cos\theta=0$，$\sin\theta=-1$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{3}{2}\pi$

したがって　$-2i=2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

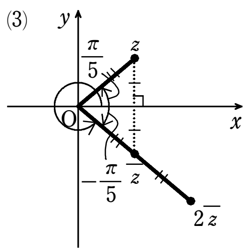


(3) z の絶対値は　$\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{\pi}{5}}=1$，　偏角は $\frac{\pi}{5}$

点 $2\bar{z}$ は，点 z を実軸に関して対称移動し，原点からの距離を 2 倍した点である。

よって，$2\bar{z}$ の　絶対値は　2，偏角は　$2\pi-\frac{\pi}{5}=\frac{9}{5}\pi$

したがって　$2\bar{z}=2\left(\cos\frac{9}{5}\pi+i\sin\frac{9}{5}\pi\right)$



[2] 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $2-2i$　　(2) -3　　(3) $\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi$

解答　(1) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$　　(2) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$

(3) $\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$

解説

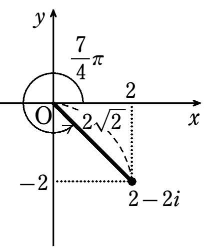
(1) 絶対値は　$\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

偏角 θ は　$\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

$\sin\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{7}{4}\pi$

したがって　$2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

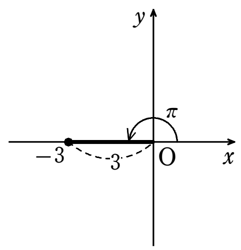


(2) 絶対値は　$\sqrt{(-3)^2}=3$

偏角 θ は　$\cos\theta=\frac{-3}{3}=-1$，$\sin\theta=\frac{0}{3}=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\pi$

したがって　$-3=3(\cos\pi+i\sin\pi)$



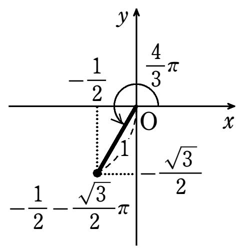
(3) $\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

絶対値は　$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

偏角 θ は　$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{4}{3}\pi$

したがって　$\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$



別解　等式 $\cos(\pi-\theta)=\cos(\pi+\theta)$，$\sin(\pi-\theta)=-\sin(\pi+\theta)$ において，$\theta=\frac{\pi}{3}$ とすると　$\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\frac{4}{3}\pi$，$\sin\frac{2}{3}\pi=-\sin\frac{4}{3}\pi$

したがって　$\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$

[3] $\alpha=2+2i$，$\beta=1-\sqrt{3}\,i$ のとき，$\alpha\beta$，$\frac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

解答　$\alpha\beta=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi+i\sin\frac{23}{12}\pi\right)$，$\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$

解説

$\alpha=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，

$\beta=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$　と表される。

よって　$\alpha\beta=2\sqrt{2}\cdot2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{3}\pi\right)\right\}$

$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi+i\sin\frac{23}{12}\pi\right)$

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5}{3}\pi\right)\right\}$

$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{17}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{17}{12}\pi\right)\right\}$

$-\frac{17}{12}\pi=\frac{7}{12}\pi+2\pi\times(-1)$ から　$\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$

[4] $1+\sqrt{3}\,i$，$1+i$ を極形式で表すことにより，$\cos\frac{\pi}{12}$，$\sin\frac{\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。

解答　$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

解説

$1+\sqrt{3}\,i$，$1+i$ をそれぞれ極形式で表すと

$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

したがって　$\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$　……①

また　$\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i}=\frac{(1+\sqrt{3}\,i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i+\sqrt{3}\,i+\sqrt{3}}{1+1}$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$　……②

よって，①，② から　$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，$\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

したがって　$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

[5] (1) $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ とするとき，$\alpha+i$ の偏角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ を求めよ。

(2) $\alpha+i$ の絶対値に注目することにより，$\cos\frac{\pi}{8}$ の値を求めよ。

解答　(1) $\theta=\frac{3}{8}\pi$　　(2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

解説

(1) $\alpha=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$，$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ から

$\alpha+i=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)+\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\right)+i\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4}=2\cos\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\cos\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=2\cos\frac{3}{8}\pi\cos\frac{\pi}{8}$

$\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}=2\sin\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\cos\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=2\sin\frac{3}{8}\pi\cos\frac{\pi}{8}$

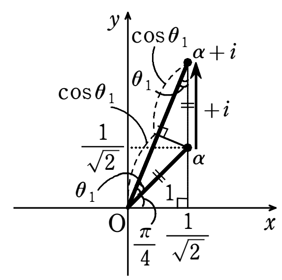
であるから　$\alpha+i=2\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi\right)$　……①

$2\cos\frac{\pi}{8}>0$ から，① が $\alpha+i$ の極形式で，偏角は　$\theta=\frac{3}{8}\pi$

別解　図で考える。

$2\theta_1+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ から　$\theta_1=\frac{\pi}{8}$

求める偏角は　$\frac{\pi}{4}+\theta_1=\frac{3}{8}\pi$



(2) $\alpha+i=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)+i=\frac{1}{\sqrt{2}}\{1+(1+\sqrt{2})i\}$ であるから

$$|\alpha+i|=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1^2+(1+\sqrt{2})^2}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

(1) から　$|\alpha+i|=2\cos\frac{\pi}{8}$

よって，$2\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ から　$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

6 (1) $z=2+4i$ とする。点 z を，原点を中心として $-\frac{2}{3}\pi$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(2) 次の複素数で表される点は，点 z をどのように移動した点であるか。

（ア） $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}z$　　（イ） $\frac{z}{1-\sqrt{3}i}$　　（ウ） $-i\overline{z}$

解答 (1) $-1+2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})i$

(2) （ア） 原点を中心として $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した点

（イ） 原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し，原点からの距離を $\frac{1}{2}$ 倍した点

（ウ） 実軸に関して対称移動し，原点を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点

解説

(1) 求める点を表す複素数は

$$\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}z=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(2+4i)$$
$$=-1+2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})i$$

(2) （ア） $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}z=\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)z$

よって，点 $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}z$ は，点 z を原点を中心として $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した点である。

（イ） $\frac{z}{1-\sqrt{3}i}=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}z=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)z$

よって，点 $\frac{z}{1-\sqrt{3}i}$ は，点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し，原点からの距離を $\frac{1}{2}$ 倍した点である。

（ウ） 点 z と点 $\overline{z}$ は実軸に関して対称である。

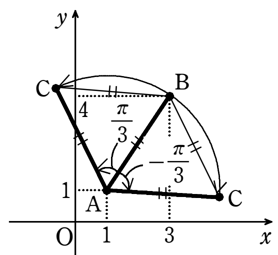
また　$-i\overline{z}=(0-i)\overline{z}=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\overline{z}$

よって，点 $-i\overline{z}$ は，点 z を実軸に関して対称移動し，原点を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

7 複素数平面上の 3 点 A $(1+i)$，B $(3+4i)$，C について，△ABC が正三角形となるとき，点 C を表す複素数 z を求めよ。

解答 $z=\frac{4\pm3\sqrt{3}+(5\mp2\sqrt{3})i}{2}$ （複号同順）

解説



点 C は，点 A を中心として点 B を $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。

回転角が $\frac{\pi}{3}$ のとき

$$z=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\{(3+4i)-(1+i)\}+1+i$$
$$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(2+3i)+1+i=\frac{4-3\sqrt{3}+(5+2\sqrt{3})i}{2}$$

回転角が $-\frac{\pi}{3}$ のとき

$$z=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\{(3+4i)-(1+i)\}+1+i$$
$$=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)(2+3i)+1+i=\frac{4+3\sqrt{3}+(5-2\sqrt{3})i}{2}$$

したがって　$z=\frac{4\pm3\sqrt{3}+(5\mp2\sqrt{3})i}{2}$ （複号同順）

8 複素数平面上に 3 点 O (0)，A $(-1+3i)$，B がある。△OAB が直角二等辺三角形となるとき，点 B を表す複素数 z を求めよ。

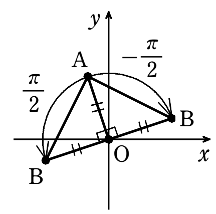
解答 $z=3+i$，$-3-i$，$2+4i$，$-4+2i$，$1+2i$，$-2+i$

解説

[1] ∠O が直角のとき，点 B は，点 O を中心として点 A を $\frac{\pi}{2}$ または $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから

$z=\pm i(-1+3i)$

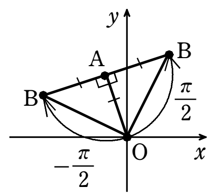
よって　$z=-3-i$，$3+i$



[2] ∠A が直角のとき，点 B は，点 A を中心として点 O を $\frac{\pi}{2}$ または $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから

$z=\pm i\{0-(-1+3i)\}-1+3i$

よって　$z=2+4i$，$-4+2i$

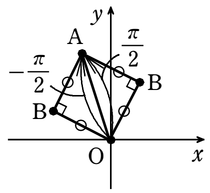


[3] ∠B が直角のとき，点 A は，点 B を中心として点 O を $\frac{\pi}{2}$ または $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから

$-1+3i=\pm i(0-z)+z$

z について整理すると　$(1\pm i)z=-1+3i$

これを解いて　$z=1+2i$，$-2+i$



以上から　$z=3+i$，$-3-i$，$2+4i$，$-4+2i$，$1+2i$，$-2+i$

9 (1) 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

（ア） $\frac{7-i}{-3+4i}$　　（イ） $\sin\alpha+i\cos\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

(2) z を虚数とする。$z+\frac{1}{z}$ が実数となるとき，$|z|=1$ であることを示せ。また，$z+\frac{1}{z}$ が自然数となる z をすべて求めよ。

解答 (1) （ア） $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$　（イ） $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

(2) 証明略，$z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

解説

(1) （ア） $\frac{7-i}{-3+4i}=\frac{(7-i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}=\frac{-25-25i}{25}=-1-i$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

（イ） $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ であり，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ から

$$0<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{\pi}{2}$$

よって　$\sin\alpha+i\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

(2) $z+\frac{1}{z}$ が実数となるとき　$\overline{z+\frac{1}{z}}=z+\frac{1}{z}$　すなわち　$\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}=z+\frac{1}{z}$

両辺に $z\overline{z}$ を掛けて　$z(\overline{z})^2+z=z^2\overline{z}+\overline{z}$

したがって　$(z-\overline{z})(|z|^2-1)=0$

z は虚数であるから　$z\neq\overline{z}$

よって，$|z|^2-1=0$ から　$|z|^2=1$　$|z|>0$ であるから　$|z|=1$

また，$z+\frac{1}{z}$ が自然数となるとき，$|z|=1$ から，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と表される。

ここで，z は虚数であるから　$\sin\theta\neq0$

$\frac{1}{z}=\cos\theta-i\sin\theta$ であるから　$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$　…… ①

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから，① が自然数となるための条件は，$2\cos\theta=1$，2 より

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\ 1$$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき　$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta=1$ のとき　$\sin\theta=0$　これは不適。

したがって，求める z の値は　$z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

10 複素数 $z_n=\cos\frac{\pi}{3^n}+i\sin\frac{\pi}{3^n}$ に対して，$\frac{z_2z_4\cdots\cdots z_{2n}}{z_1z_3\cdots\cdots z_{2n-1}}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ $(-\pi<\alpha\leqq\pi)$

と表すとき，$\alpha=^{ア}\boxed{}\left(1-3^{\boxed{イ}}\right)\pi$ である。ただし，n は自然数とする。

解答 （ア） $-\frac{1}{4}$　（イ） $-2n$

解説

$$z_2z_4\cdots\cdots z_{2n}=\cos\left(\frac{\pi}{3^2}+\frac{\pi}{3^4}+\cdots\cdots+\frac{\pi}{3^{2n}}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3^2}+\frac{\pi}{3^4}+\cdots\cdots+\frac{\pi}{3^{2n}}\right)$$

$$z_1z_3\cdots\cdots z_{2n-1}=\cos\left(\frac{\pi}{3^1}+\frac{\pi}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{\pi}{3^{2n-1}}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3^1}+\frac{\pi}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{\pi}{3^{2n-1}}\right)$$

ここで　$\frac{\pi}{3^2}+\frac{\pi}{3^4}+\cdots\cdots+\frac{\pi}{3^{2n}}=\frac{\frac{\pi}{3^2}\left\{1-\left(\frac{1}{3^2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3^2}}=\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}\pi$

$$\frac{\pi}{3^1}+\frac{\pi}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{\pi}{3^{2n-1}}=\frac{\frac{\pi}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3^2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3^2}}=\frac{3}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}\pi$$

よって　　$\alpha=\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}\pi-\frac{3}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}\pi=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{9}\right)^n-1\right\}\pi$

自然数 n に対して　　$0<\left(\frac{1}{9}\right)^n<1$　　　　ゆえに　　$-\frac{\pi}{4}<\alpha<0$

すなわち，$-\pi<\alpha\leqq\pi$ は満たされている。

したがって　　$\alpha=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{9}\right)^n-1\right\}\pi={}^{\text{ア}}-\frac{1}{4}(1-3^{{}^{\text{イ}}-2n})\pi$

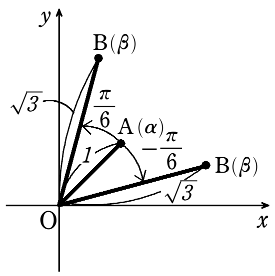
$\boxed{11}$ 複素数平面上で，3 点 O(0)，A(α)，B(β) を頂点とする三角形 OAB が $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{6}$，$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たすとき，${}^{\text{ア}}\boxed{}\alpha^2-{}^{\text{イ}}\boxed{}\alpha\beta+\beta^2=0$ が成り立つ。

解答　（ア） 3　　（イ） 3

解説

$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ から　　$\mathrm{OB}=\sqrt{3}\,\mathrm{OA}$

また，$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{6}$ から，点 B は，原点 O を中心として点 A を $\frac{\pi}{6}$ または $-\frac{\pi}{6}$ だけ回転し，O からの距離を $\sqrt{3}$ 倍した点である。



よって　　$\beta=\sqrt{3}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)\right\}\alpha$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}\pm i)}{2}\alpha\quad(\text{複号同順})$$

ゆえに　　$2\beta-3\alpha=\pm\sqrt{3}\,\alpha i$　　　両辺を平方すると　　$(2\beta-3\alpha)^2=(\sqrt{3}\,\alpha i)^2$

よって　　$4\beta^2-12\alpha\beta+9\alpha^2=-3\alpha^2$　　　整理すると　　${}^{\text{ア}}3\alpha^2-{}^{\text{イ}}3\alpha\beta+\beta^2=0$